Enkonduko al natura dedukto

Daniel Clemente Laboreo

Aŭgusto 2004 (revuita en Majo 2005)

Enhavo

1 Antaŭ ĉio **3**
- 1.1 Kiu mi estas . . . 3
- 1.2 Kial mi verkas ĉi tion . . . 4
- 1.3 Al kiu ĝi estas adresita . . . 4
- 1.4 Permesilo . . . 4

2 Bazaj konceptoj **4**
- 2.1 Formaligo . . . 5
- 2.2 Uzataj simboloj . . . 5
- 2.3 Prioritato de la operatoroj . . . 6

3 Natura dedukto **7**
- 3.1 Por kio ĝi utilas . . . 7
- 3.2 Por kio ĝi malutilas . . . 7
- 3.3 Agmaniero . . . 8
- 3.4 Notacio . . . 8

4 La derivreguloj **9**
- 4.1 Iteracio . . . 9
- 4.2 Kunkajigo . . . 10
- 4.3 Elkajigo . . . 10
- 4.4 Kunimplikaciigo . . . 11
- 4.5 Elimplikaciigo . . . 11
- 4.6 Kunaŭigo . . . 11
- 4.7 Elaŭigo . . . 12
- 4.8 Kunnegigo . . . 12
- 4.9 Elnegigo . . . 13
- 4.10 Ne plu reguloj . . . 13

5 Klarigitaj ekzercoj **14**
5.1 Iu tre simpla. $P,\ P \Rightarrow Q \vdash P \wedge Q$ 14
5.2 Iomete pli kompleksa. $P \wedge Q \Rightarrow R,\ Q \Rightarrow P,\ Q \vdash R$ 15
5.3 Jam supozante aĵojn. $P \Rightarrow Q,\ Q \Rightarrow R \vdash P \Rightarrow Q \wedge R$ 15
5.4 Uzante iteracion. $P \vdash Q \Rightarrow P$ 17
5.5 Redukto al absurdo. $P \Rightarrow Q,\ \neg Q \vdash \neg P$ 17
5.6 Kun subderivoj. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \vdash Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ 18
5.7 Iu kun provo per okazoj. $P \vee (Q \wedge R) \vdash P \vee Q$ 18
5.8 Iu por pensi. $L \wedge M \Rightarrow \neg P,\ I \Rightarrow P,\ M,\ I \vdash \neg L$ 19
5.9 Malplena maldekstra parto. $\vdash P \Rightarrow P$ 21
5.10 Supozu tion kontraŭan. $\vdash \neg(P \wedge \neg P)$ 21
5.11 Tiu ŝajnas facila. $\vdash P \vee \neg P$ 22
5.12 Iu interesa. $P \vee Q,\ \neg P \vdash Q$ 23
5.13 Tiu aperis en mia ekzameno. $A \vee B,\ A \Rightarrow C,\ \neg D \Rightarrow \neg B \vdash C \vee D$ 24
5.14 Iu "mallonga". $A \Longleftrightarrow B \vdash (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ 25

6 Malkorektaĵoj **27**
6.1 Enigo kaj forigo de *"tio kio plej plaĉas min"* 27
6.2 Ion kopii el malatingebla subderivo 27
6.3 Mismeti la krampojn 29
6.4 Fini en subderivo 29
6.5 Malfari paŝojn 29

7 Iom pli kompleksa **30**
7.1 Reguloj pri vero kaj falso 30
7.1.1 Enigo de vero 30
7.1.2 Forigo de falso 30
7.2 Reguloj pri kvantoroj 30
7.2.1 Kio tio estas 31
7.2.2 Enigo de ekzistokvantoro 31
7.2.3 Forigo de ekzistokvantoro 31
7.2.4 Enigo de universala kvantoro 32
7.2.5 Forigo de universala kvantoro 32
7.2.6 Ekzemploj 32
7.3 Malbazaj reguloj 32

8 Ekstra **33**
8.1 Kial nomiĝas naturan dedukton? 33
8.2 Ĉu la solvo estas nura? 33
8.3 Aliaj rimedoj por pruvi validecon 34
8.3.1 Brutforte 34
8.3.2 Teoremo de refuto 34
8.4 Kiel pruvi nevalidecon 34
8.5 Kreu viajn ekzercojn 34
8.6 Programoj kiuj faras naturan dedukton 35

9 Ekzemploj, pluraj ekzemploj **35**
9.1 $P,\ P \Rightarrow Q \vdash P \wedge Q$ 35
9.2 $P \wedge Q \Rightarrow R,\ Q \Rightarrow P,\ Q \vdash R$ 36
9.3 $P \Rightarrow Q,\ Q \Rightarrow R \vdash P \Rightarrow Q \wedge R$ 36
9.4 $P \vdash Q \Rightarrow P$ 36
9.5 $P \Rightarrow Q,\ \neg Q \vdash \neg P$ 36
9.6 $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \vdash Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ 37
9.7 $P \vee (Q \wedge R) \vdash P \vee Q$ 37
9.8 $L \wedge M \Rightarrow \neg P,\ I \Rightarrow P,\ M,\ I \vdash \neg L$ 37
9.9 $\vdash P \Rightarrow P$ 38
9.10 $\vdash \neg(P \wedge \neg P)$ 38
9.11 $\vdash P \vee \neg P$ 38
9.12 $P \vee Q,\ \neg P \vdash Q$ 39
9.13 $A \vee B,\ A \Rightarrow C,\ \neg D \Rightarrow \neg B \vdash C \vee D$ 39
9.14 $A \iff B \vdash (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ 40
9.15 $P \vdash (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$ 41
9.16 $P \Rightarrow Q \vdash (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ 41
9.17 $P \Rightarrow Q,\ P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \vdash P \Rightarrow R$ 41
9.18 $P \wedge Q \Rightarrow R \vdash P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ 42
9.19 $\neg P \vdash P \Rightarrow Q$ 42
9.20 $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ 42
9.21 $\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B$ 43
9.22 $\vdash ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$ 43
9.23 $Pa,\ Qa \vdash \exists x(Px \wedge Qx)$ 44
9.24 $\forall x(Px \Rightarrow Qx),\ Pa \vdash Qa$ 44
9.25 $\forall x(Px \Rightarrow Qx),\ \forall x(Qx \Rightarrow Rx) \vdash \forall x(Px \Rightarrow Rx),$ 44
9.26 $\exists x \forall y Pxy \vdash \forall y \exists x Pxy$ 44

1 Antaŭ ĉio

Ĉi tiu kurseto estas disponebla en pluraj lingvoj: hispana[1] (kaj PDF), esperanta[2] (kaj PDF), kataluna[3] (kaj PDF), kaj angla[4] (kaj PDF).

Formuloj estos plej bele vidataj per la PDF, sed, se ne eblas uzi ĝin, legu la HTML paĝojn.

1.1 Kiu mi estas

Mi nomas Daniel Clemente Laboreo, aĝas 19 jarojn (en 2004), loĝas en Gavà (Barcelona, Hispanio), kaj lernas komputikon ĉe la FIB (en la *UPC*, Publika Universitato de Katalunio). Tie, en la kurso *ILO* (*Enkonduko al logiko)*, mi estis instruita ĉi tiun temon.

[1] http://www.danielclemente.com/logica/dn.html
[2] http://www.danielclemente.com/logica/dn.eo.html
[3] http://www.danielclemente.com/logica/dn.ca.html
[4] http://www.danielclemente.com/logica/dn.en.html

1.2 Kial mi verkas ĉi tion

Jen pluraj kialoj:

- Ekzistas grava manko en la serĉo "*natura dedukto*" ĉe Google. Mi mem bezonis lerni tion antaŭ la ekzameno sed trovis nenion utilan kio povus helpi min. Same per *natural deduction* aŭ *nd*: kvankam troviĝis kelkaj kursetoj, neniu estis sufiĉe bona: ĉu estis miskomprenebla, ĉu iaj specialaj literoj malmontriĝis, ĉu ĝi ne eldiris ĉion (kvazaŭ se iu ajn jam konus logikan rezonadon). Do mi celis aldoni ĉi tiun kurson, kiu eble helpos iun.
- Estas temo ŝatata de mi, kaj facila laŭ mia opinio.
- Devigas pensi. Eble ĝi ne havas utilegan uzeblecon, sed oni vere penu por solvi kelkajn simplajn, klopodindajn ekzercojn.
- Nu, mi konfesas ke tio estis verkata por lerni skribi dokumentojn per LaTeX. Ties lernado ne estas facila, sed rezultoj igas la taskon farinda.
- Krome, la Esperantan tradukon mi faris por praktiki la lingvon. Ĉi tiu estas mia unua verko, do bonvolu korekti min! Mi ankaŭ aldonis aranĝon de teknikaj vortoj pri logiko[5] kun la plej strangajn vortojn mi uzis.

1.3 Al kiu ĝi estas adresita

Ĉefe, al iu kiu ŝatas logikon, komputikon, aŭ matematikon. Se vi volas antaŭstudi logikajn universitatajn lecionojn, vi ankaŭ gajnos utilajn konceptojn.

Ĉi tio ne penas esti kompleta kurso pri natura dedukto, sed ĝi restos nur kiel enkonduko al la temo. Kiam mi plu lernos, mi korektos ĝin se necese, sed ne pligrandigos ĝin per aliaj sekcioj (mi skribus tiujn en apartaj dokumentoj).

1.4 Permesilo

La tuta dokumento estas FDL[6] (kiel GPL ĉe libera programaro, sed por dokumentoj). La fontoteksto estas skribita per LyX (dn.eo.lyx[7]), uzante la makroon fitch.sty de Johan W. Klüwer. Mi ankaŭ uzis la programon latex2html (iomete modifitan) por krei la retpaĝon.

Vi ja rajtas ŝanĝi tiun artikolon aŭ traduki ĝin al aliaj lingvoj parolataj bone de vi; ankaŭ redistribui aŭ vendi ĝin, kaj aliaj.

2 Bazaj konceptoj

Ĉia logika afero bezonas klare difinitajn vortojn. Mi nur memorigos la signifon kaj la manieron legi la strangajn simbolojn uzatajn en ĉi tiu dokumento.

[5] http://www.danielclemente.com/logica/vortoj.html
[6] http://www.gnu.org/licenses/fdl.html
[7] http://www.danielclemente.com/logica/dn.eo.lyx

2.1 Formaligo

Formaligi signifas skribi esprimon laŭ norma maniero, tiel ke iu ajn povas precize kompreni ĝin.

Uzonte logikajn algoritmojn, oni povas pensadi per longaj frazoj kiel "*Se pluvas kaj mi ne havas pluvombrelon, mi do malsekiĝos*". Eblas, ja, sed tio estas tro longa. Anstataŭe, estas pli bone esprimi ĉiun agon per unu litero, kaj uzi tiujn literojn kune de simplaj vortoj, nome *kaj*, *aŭ*, *ne*, aŭ *do*.

Jen ekzemplo. Posedante ĉi tiun vortoprovizon:

L: *pluvi*

P: *havi kun si pluvombrelon*

M: *malsekiĝi*

La frazon "*Se pluvas kaj mi ne havas pluvombrelon, mi do malsekiĝos*" oni povas skribi per "*se L kaj ne P, do M*".

Ĉe natura dedukto, oni uzos nur la literan rimedon laŭ ĉi tiuj kondiĉoj:

- Tiuj literoj (nomataj *propoziciaj literoj*) estas majuskle.
- Oni normale uzas literojn P, Q, R, S, ... kvankam iu ajn estas korekta.
- Specialaj simboloj estas uzataj por la operatoroj *kaj*, *aŭ*, *ne*, kaj *do*.

2.2 Uzataj simboloj

Por esprimi la rilaton inter unu ago kaj alia, ekzistas kelkaj internaciaj figuretoj. La bazajn operatorojn vi konu estas $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\Rightarrow$. La ceteraj estas pli kompleksaj, sed mi montris ilin ĉi tie por ebligi konsultojn (se necese).

Simbolo	Legata...	Priskribo
$\vee$	*aŭ*	$A \vee B$ pravas se unu el la du, aŭ ambaŭ, estas vera aserto.
$\wedge$	*kaj*	Por ke $A \wedge B$ pravu, A kaj B estu ambaŭ pravaj.
$\neg$	*ne*	$\neg A$ nur pravas kiam A estas falsa.
$\Rightarrow$	*entenas / do*	Montras sekvon. La esprimo $A \Rightarrow B$ signifas ke kiam A certas, B ankaŭ certas. Krome, la implikacio $A \Rightarrow B$ estas prava escepte de la okazo A vera kaj B falsa. Por kompreni ĉi tion, pensu pri iu A el kiu sekvas B kaj demandiĝu: *eblas ke A pravas sed B ne?* Iel, malzorgu pri tio, ĉar ne estas necese kompreni tion nun.
$\Longleftrightarrow$	*se kaj nur se*	$A \Longleftrightarrow B$ estas $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Signifas ke el A oni povas dedukti B kaj reciproke, do ili estas ekvivalentaj.
$\square$	*falso*	Malplena kvadrateto prezentas *falson* (la duuma *0*). Plej teknike, ĝi rilatas al $\{\}$.
$\blacksquare$	*vero*	Plena kvadrateto prezentas *veron* (la duuma *1*). Plej teknike, ĝi rilatas al $\{<>\}$.
$\exists$	*ekzistas...*	$\exists xPx$ estas legata *ekzistas x (ikso) tia ke P de x*. Se ĉe nia domajno estas trovebla elemento tia ke propreco P aplikata al tiu elemento certas, tiam la formulo estas vera.
$\forall$	*por ĉiu...*	$\forall xPx$ estas legata *por ĉiu x (ikso), P de x*. Se ĉiuj elementoj ĉe nia tasko certigas proprecon P, tiam formulo pravas.
$\vdash$	*tiam*	$\vdash$ simbolas *deriveblon*, kio estas la maniero diri "*kiam ĉio el la maldekstra parto veras, tiam ankaŭ certas ĉio el la dekstra parto*". Ekzistas validaj derivoj, kia $P \wedge Q \vdash P$ aŭ kia $P \Rightarrow Q,\ Q \Rightarrow R,\ P \vdash P \wedge R$. Ankaŭ estas nevalidaj, kia $P \Rightarrow Q,\ \neg P \vdash \neg Q$. Natura dedukto penas aserti la validecon de derivo.
$\models$	*valida*	$\phi \models \varphi$ diras ke φ estas logika sekvo de ϕ, do oni skribas per $A \models B$ la validecon de derivo $A \vdash B$; tio estas, oni iel pruvis ĝin, do ĝi estas akceptata kiel vera ĉe ia ajn interpreto de la predikatsimboloj.
$\not\models$	*nevalida*	$\phi \not\models \varphi$ signifas ke φ ne estas logika sekvo de ϕ. Se oni trovas aron da valoroj (*modelon*) kiu certigas ϕ sed falsigas φ, nevalideco estas pruvita.
$\Vdash$	*plenumebla*	Aro da formuloj estas plenumebla (angle "*satisfiable*") se ekzistas aro da valoroj (*modelo*) kiu certigas la tutajn formulojn samtempe.
$\nVdash$	*malplenumebla*	Aro da formuloj estas malplenumebla (angle "*unsatisfiable*") se nenia aranĝaĵo de valoroj (*modelo*) povas certigi la tutajn formulojn samtempe.

2.3 Prioritato de la operatoroj

Vidante esprimon, vi devas kompreni kio ĝi estas. Ekzemple: $A \vee B \Rightarrow C$ estas implikacio (sed ne estas aŭo!), ĉar $\Rightarrow$ estas kalkulota laste (ĝi havas malpli prioritato ol la $\vee$).

Jen la operatoroj, malkreske orditaj laŭ prioritato.

- $\Longleftrightarrow$
- $\Rightarrow$
- $\vee$ kaj $\wedge$ (sama prioritato)
- $\neg$

Ĉi tio signifas ke $\neg$ estas la plej "*kunliganta*" al la proksimaj simboloj. Jen ekzemplo pri kiam kaj kie metu krampojn:

$P \vee \neg Q \Rightarrow R \wedge P \Longleftrightarrow \neg(R \vee S) \wedge A \Rightarrow B$ estas tute ekvivalenta al $(\ (P \vee (\neg Q))\ \Rightarrow\ (R \wedge P)\ ) \Longleftrightarrow (\ ((\neg(R \vee S)) \wedge A) \Rightarrow B\ )$

Trankvilu, mi ne plu uzos tiel longajn esprimojn.

3 Natura dedukto

Nun oni devas lerni kio ĝi estas, kiel faru ĝin, kaj ties utilo (se ĝi ja havas).

3.1 Por kio ĝi utilas

Natura dedukto utilas por pruvi la korektecon de rezonado, aŭ almenaŭ por provi tion. Laŭ la teorio, ĝi estas rimedo "*por pruvi la validecon de derivo*". Jen ekzemplo:

Mi diras al vi: "*Ĉe somero estas varme, kaj nuntempe oni estas ĉe somero, do ja estas varme*". Vi komencas kalkuladon, kaj poste diras al mi: "*Nu, mi ja povas pruvi ke via rezonado estas korekta*". Tiu estas la celo de natura dedukto.

Ĉiam ne estos tiom facile: "*se vi malaprobas lecionaron, vi devas ripeti ĝin. Se vi ne studas, vi malaprobos ĝin. Supozu ke vi ne ripetas ĝin. Do tiam, ĉu vi studas ĝin, ĉu vi malaprobas ĝin, ĉu ambaŭ samtempe*". Tiu rezonado estas valida kaj povas esti pruvata per natura dedukto.

Rimarku ke vi eblas malkredi aŭ malkompreni ĉion kion mi rakontas. Ekzemple, mi asertas: "*Transistoroj estas etaj kaj feliĉaj; kikero ne estas eta, do ĝi ne estas transistoro*". Eĉ se vi malsukcesas kompreni tiujn vortojn, aŭ se vi kredas ke tio estas sensence (ĝi ja estas), vi estu tute certa ke la rezonado estis korekta.

Do, donite supozo kia "*se ĉi tio okazas, tiam okazas ĉi tio alia*", natura dedukto eblas konkludi "*jes, vi pravas*". Logike: donite derivo $A \vdash B$, vi povas konkludi ke ĝi estas $\vDash$ (*valid*a). Tiam oni skribas $A \vDash B$ (A sekvigas B).

3.2 Por kio ĝi malutilas

Ĝi ne estas por pruvi la *nevalidecon* de iu supozo. Se mi asertas "*se matene, ne estas nokte; nun estas matene, do estas ankaŭ nokte*" vi eble provados longtempe la regulojn de natura dedukto, sed renkontos nenian utilaĵon. Plej eble vi intuos ke la rezonado ne estas valida, kaj nur tiam, oni devos provi aliajn rimedojn -ne natura dedukto- por celi pruvi nevalidecon. Kelkaj el ili estas klarigotaj poste.

Do, natura dedukto nur utilas por pruvi validecon, sed ne nevalidecon. Bedaŭrinde, ĉu ne?

Nek ĝi estas rimedo por solvi la demandon "*Kio okazus se...?*". Kiam la valideco de $A \vdash B$ estu pruvata, oni devas pensi pri ĉio kio okazus se A certus, kaj se oni eltrovas ke unu el tiuj aĵoj estas B, oni jam finis. Tamen, estas neeble doni finotan liston kun ĉiuj el ili.

3.3 Agmaniero

Oni estas demandita pruvi la validecon de $\Gamma \vdash S$, kie Γ (legata *gamma*) estas aro da formuloj disrompitaj per komoj, kaj S estas simpla formulo.

Komencante, oni akceptos ĉiujn formulojn el Γ kiel certaj, kaj, per 9 precizaj reguloj, eltrovos kiuj aliaj aĵoj estas ankaŭ certaj. Nia intenco estas trovi ke S ja certas; do ĉi tio ĵus atingite, oni haltiĝos.

Iam estos trovebla neniun veraĵon, do oni supozados: "*nu, mi ne scias se $A \wedge B$ ĉiam estas certa, sed se C certas, tiam ĝi estas vera sendube*". Tiel oni ektrovis iun novan veraĵon: $C \Rightarrow A \wedge B$.

Kompreneble, oni ĉiam devas memori kion oni volas atingi, ĉar alie, oni divenus multajn veraĵojn kiuj ja estas veraj, sed estus tute malbezonataj por la nuna ekzerco. Ekzemple, por $A \vee B,\ \neg A \vdash B$ oni devas atingi la verecon de B. Eble ni eltrovos ke $\neg(A \wedge B)$, $A \vee B \vee C$, $(A \vee B) \Rightarrow \neg A$, kaj tiel plu; sed ni nur bezonas B, ne aliaj. Do, se vi devojiĝas de la simpla solvo, vi eble konfuziĝos.

3.4 Notacio

Eblas diversaj manieroj por skribi naturdeduktajn skemojn. Mi uzos la stilon Fitch, pro esti kiun mi estis instruita, esti facile komprenebla, kaj necesigi malgrandan spacon. Ĝi estas tiel:

1	$P \Rightarrow Q$	
2	$Q \Rightarrow R$	
3	$\quad P$	H
4	$\quad Q$	E$\Rightarrow$ 1,3
5	$\quad R$	E$\Rightarrow$ 2,4
6	$\quad Q \wedge R$	I$\wedge$ 4,5
7	$P \Rightarrow Q \wedge R$	I$\Rightarrow$ 3,6

Ĉi tio pruvas validecon de $P \Rightarrow Q,\ Q \Rightarrow R \vdash P \Rightarrow Q \wedge R$.

La skemon oni legas linion post linio, de supre al sube. La maldekstrajn numerojn montras la numeron de ĉiu linio, kaj ĉiam estas laŭorde.

La linioj plej supre enhavas ĉiun el la formuloj kiuj troviĝas en la maldekstra parto de la derivo. Nun oni havas du: $P \Rightarrow Q$ kaj $Q \Rightarrow R$. De tiuj oni devos konkludi $P \Rightarrow Q \wedge R$.

En ĉiu linio estas notata kion aĵon oni trovis certa, kaj dekstre oni klarigas kiel ĝi estas trovita. Tiuj simboloj dekstraj estas mallongigoj de nomoj el la 9 reguloj: E estas pro la angla "*elimination*" kaj I pro "*introduction*" (mi konservas tian notacion, komuna por plej lingvoj). En Esperanto, oni povas uzi "*forigo*" kaj "*enigo*", aŭ prefiksojn "*el-*" kaj "*kun-*" (mi sekve klarigos tion).

Ekzemple, kelkajn regulojn oni vidas tie estas *elimplikaciigo* ($E \Rightarrow$), *kunkajigo* ($I\wedge$), kaj *kunimplikaciigo* ($I \Rightarrow$). Komprenu la vortojn: *el-kaj-ig-o* estas *forigo de konjunkcio* (*kaj-o*), *kun-aŭ-ig-o* estas *enigo de disjunkcio* (*aŭ-o*), *el-neg-ig-o* estas *forigo de negacio* (*neg-o*), ktp. La nomoj de la 9 derivreguloj estas do *kunkajigo*, *elkajigo*, *kunaŭigo*, *elaŭigo*, *kunimplikaciigo*, *elimplikaciigo*, *kunnegigo*, *elnegigo*, *iteracio*. Vi ankaŭ povas legi ilin longe, kvazaŭ la angla ("*implication elimination*", "*disjunction introduction*", ktp.).

La numeroj kunigantaj la nomojn de ĉiu regulo klarigas la loko el kie oni prenis la necesajn formulojn por apliki tiun regulon. Ili estas liniajn numerojn, do, por apliki regulon oni devas nur uzi informon el la jam verkitaj supraj linioj.

Fine, tiu vertikala linieto kiu trairas de linio 3 al la 6 estas hipotezo (tial oni skribis H dekstre). Ĉio kio estas enmetita tie ne estas ĉiam certa, sed nur kiam certas P (la komenco de la hipotezo, ĉe linio 3). Tial, formuloj trovitaj ĉe la hipotezo oni ne uzu ekstere, ĉar ili ne estas ĉiam pravaj.

La procedo finiĝas kiam oni eltrovas ke estas prava la formulo verkita dekstre de la derivsimbolo, jen $P \Rightarrow Q \wedge R$ (tio aperas ĉe la lasta linio).

4 La derivreguloj

Jen estas esprimitaj kaj klarigitaj la naŭ bazaj reguloj kiujn oni uzas ĉe natura dedukto. Ilia celo estas montri kiam kaj kiel oni aldonu pli da certaj formuloj.

Vi trovos ekzemplojn (eksplikitajn) ĉe la sekva sekcio.

4.1 Iteracio

Tiu estas tre simpla regulo:

$$\begin{array}{lll} \text{n} & A & \\ \hline & A & \text{IT n} \end{array}$$

Nu, tiel verkite estas iom konfuza, sed ĉi tio estas ĝia formala difino, do estas la plej utila maniero skribi la regulon. Supra formulaĵo signifas ke se en linio numero n estas verkata A (ia ajn esprimo) tiam oni povas reskribi A en la nuna linio, klarigante tiun aldonon per la noto $IT\ n$ verkita dekstre.

Do kial oni volus tion? Ĝis la momento, por nenion, tamen, tio havos sian utilecon poste, kiam oni komencos uzi hipotezojn. Ĉar hipotezo estas *ferma* (malebligas eniron aŭ eliron de formuloj), ĉiuj reguloj devos uzi formulojn el ĉe la hipotezo. Se nia ŝatita formulo estas tuj ekstere de tiu hipotezo, oni povas enmeti ĝin uzante la *iteracion*.

Iuj kredas ke ne estas necese elspezi linion tiel, sed ĝia uzado multe klarigas la skemojn. Sed io malpermesita estas uzi ĝin nur por "*alproksimiĝi*" formulon kiu estas kelkajn liniojn supre: estas malnecese reskribi linion kiu jam estas skribita supre en la nuna derivo.

4.2 Kunkajigo

La kajon (aŭ konjunkcion) oni povas facile krei:

m	A	
n	B	
	$A \land B$	I$\land$ m,n

Bone komprenu la funkciadon de figuroj kiel la supra. Kiam oni pentras longan horizontalan linion, normale ĝi estas por disigi la *premisojn* (supre) de la *konkludo* (malsupre). Premisoj estas kondiĉoj kiuj devas certiĝi por apliko de la regulo, kaj konkludo estas rezulto de tiu apliko.

Tiu regulo diras ke se en linio veraĵo estas skribita, kaj en alia linio estas alia veraĵo, tiam oni povas skribi per nur unu linio ke ambaŭ aĵoj estas veraj. Oni devos noti dekstre la liniojn el kiu oni eltiris la unuan kaj la duan formulojn.

Tio estas plej logike, ĉu ne? Se oni scias ke (vere) *pluvas*, kaj (tiel vere) *estas sune*, tiam sendube oni povas diri ke *pluvas kaj estas sune* (samtempe). Se io ŝajnas stranga, ne estas pro nia lerta rezonado; kulpigu al kiu asertis al ni ke *pluvas* aŭ *estas sune*.

Rimarku ke prenante la liniojn turnite, oni povas atingi $B \land A$, kaj prenante la saman linion eblas $A \land A$ kaj $B \land B$, kiuj ankaŭ estas pravaj.

4.3 Elkajigo

Tio estas operacio kontraŭa al la lasta. Ĝi havas du partojn. Unue:

n	$A \land B$	
	A	E$\land$ n

Kaj la dua, por akiri B:

n	$A \land B$	
	B	E$\land$ n

Do, oni povas disigi laŭ pluraj linioj la konjunkcierojn el konjunkcio. Tial, oni nomas tiun regulon *forigo de la konjunkcio* (aŭ *elkajigo*): el linio kiu havas kaj-simboloj ($\land$) oni atingas aliajn kiuj jam ne havas ilin; kompreneble, penante alproksimiĝi al nia celo (atingi iun formulon).

4.4 Kunimplikaciigo

Tiu estas pli interesa, ĉar ĝi eblas uzi utile hipotezojn (tiujn subderivojn kiuj havas vertikalan linion maldekstre). Jen ĝi estas:

$$\begin{array}{c|cc} \text{m} & A & \text{H} \\ \cline{2-2} \text{n} & B & \\ \hline & A \Rightarrow B & \text{I}\Rightarrow \text{m,n} \end{array}$$

Kion ĝi signifas estas ke se oni skribis ion (ĝin nomiĝu A), kaj poste eltrovis (per la derivreguloj) ke supozinte A certigas B (io ajn), tiam oni povas klare aldiri ion: ne eblas aserti ke B estas ĉiam prava, sed jes ke A entenas B, kio estas skribita $A \Rightarrow B$.

Tio ebligas nin finigi subderivon kaj daŭrigi nian lastan taskon. Memoru ke natura dedukto ne devas esti haltita ĉe subderivo.

4.5 Elimplikaciigo

Pli simpla ol la lasta ĉar ĝi ne temas pri supozoj sed pri faktoj:

$$\begin{array}{ccc} \text{m} & A \Rightarrow B & \\ \text{n} & A & \\ \hline & B & \text{E}\Rightarrow \text{m,n} \end{array}$$

Simple, se oni estas dirita ke kiam okazas A ankaŭ okazas B (tio estas la signifo de $A \Rightarrow B$), kaj oni ankaŭ scias ke A, do oni povas aserti ke B.

Tiu regulo estas ankaŭ nomata *modus ponens*.

4.6 Kunaŭigo

La disjunkcio (la aŭo) estas tre facila sed ne memvidebla:

$$\begin{array}{ccc} \text{n} & A & \\ \hline & A \vee B & \text{I}\vee \text{ n} \end{array}$$

Nu, plej precize, mi diru ke ankaŭ ekzistas laŭ la alia ordo:

$$\begin{array}{ccc} \text{n} & A & \\ \hline & B \vee A & \text{I}\vee \text{ n} \end{array}$$

Mirinda, ĉu ne? Se oni scias ke "*hodiaŭ estas ĵaŭdo*" oni ankaŭ scias ke "*hodiaŭ estas ĵaŭdo aŭ bovinoj flugas*", "*hodiaŭ estas ĵaŭdo aŭ vendredo*", eĉ "*hodiaŭ estas ĵaŭdo... aŭ ne*". Ĉiuj estas certaj.

Memoru ke, parole, oni emas uzi *ekskludan aŭon* (*disaŭo*, kaj *XOR* en la angla), kiu certas se unu el la disjunkcieroj estas vera sed ne kiam ambaŭ el ili estas veraj samtempe. Por logikisto, komuna frazo "*hodiaŭ estas ĵaŭdo aŭ vendredo*" certiĝas ĉe tri malsamaj okazoj: kiam *hodiaŭ estas ĵaŭdo*, kiam *hodiaŭ estas vendredo*, kaj kiam *hodiaŭ estas ĵaŭdo kaj vendredo samtempe* (iom malfacile ĉe la reala mondo, tamen, matematikistoj estas emaj supozi ion ajn...).

4.7 Elaŭigo

Tiu estas la plej malfacila regulo, precipe ĉar donite de frazo kun *aŭ*, kiel "*hodiaŭ estas ĵaŭdo aŭ vendredo*", kion do oni povas eltiri? Ĉu ke *hodiaŭ estas ĵaŭdo*? Ne, eble estas vendredo. Ĉu ke *hodiaŭ estas vendredo*? Ne, eble estas ĵaŭdo. Ĉu ke *hodiaŭ estas ĵaŭdo aŭ vendredo*? Nu, jes, sed oni jam sciis tion...

Jen la regulo (nun mi klarigos ĝin):

$$
\begin{array}{l|l|l}
\text{m} & \multicolumn{2}{l}{A \lor B} \\
 & A & \text{H} \\
\cline{2-2}
\text{n} & C & \\
 & B & \text{H} \\
\cline{2-2}
\text{p} & C & \\
\hline
 & C & \text{E}\lor\ \text{m,n,p}
\end{array}
$$

Oni bezonas pli da informon, krome de $A \lor B$. Se, bonŝance, oni scias ke $A \Rightarrow C$, kaj ankaŭ $B \Rightarrow C$, tio do eblas ja scii kio okazos kiam $A \lor B$: ambaŭ unu elekto kaj la alia sekvigas C, do C estas prava.

Tia okazo estas nur ebla en ekzercoj preparitaj por ke tiu *forigo de disjunkcio* aperu, aŭ kiam A kaj B multe similas (tiam, oni facile trovos ian C tia ke ambaŭ entenu ĝin).

Ekzemple: kiam mi kontraktis atingon al la Interreto per ADSL, tio estis per *Telefónica* aŭ *Terra*, sed mi tute ne certas pri kiu el ili aldonis al mi la servon (eĉ ili ne sciis). Sed ĉe mia lando (Hispanio), ĉiu elekto estis malrapida, multekosta, kaj plena da problemoj (nomu M al tiuj malbonaĵoj), do, iu ajn kompanio estis M. Konkrete, $Telefonica \Rightarrow M$ kaj $Terra \Rightarrow M$, do sendube kvalito de mia ret-atingo estas klara: ĝi estis ankaŭ M, sendepende de kiun el la du kompanioj mi uzis. Fakte, mi bezonis 9 monatoj por plene kontrakti la servon... Bonsorte ĉi tio okazis nur multaj jaroj antaŭ nune.

Tiu regulo estas konata per *provo per okazoj*, ĉar oni devas provi ĉiun el la eblaj okazoj por certiĝi ke ĉiuj kondukas al sama konkludo.

4.8 Kunnegigo

Ĉi tiu estas belega kaj interesa:

$$
\begin{array}{l|ll}
\text{m} & A & \text{H} \\ \cline{2-2}
\text{n} & B & \\
\text{p} & \neg B & \\ \hline
 & \neg A & \text{I}\neg\ \text{m,n,p}
\end{array}
$$

Se supozinte A, vi atingis la konkludon ke ambaŭ B kaj $\neg B$ certiĝas samtempe, tio ankoraŭ ne estas fuŝita, ĉar vi ĵus ektrovis alian veraĵon: ke ne eblas ke A certu, do, ke $\neg A$ certas.

Ekzemple, mi konfesas ke *se mi uzas Vindozon (Windows), mi ne profitas la tempon kiam mi uzas komputilon.* Ekde kelkaj jaroj antaŭe, *mi ja profitas ĝin*, do la konkludo estas ke *mi ne uzas Vindozon.* Por atingi tiun konkludon, la vojon vi sekvus (eble senpense) estas precize kiun tiu regulo necesas: supozu ke *mi ja uzas Vindozon*, tiaokaze *mi ne profitus mian komputilon.* Tamen, mi diris ke *mi ja profitas ĝin*, do tiu supozo estu erara.

Al tiu procedo oni nomas *redukto al absurdo* (*reductio ad absurdum*): supozi ion por atingi memkontraŭdiron kaj ebligi aserti ke tio supozita estas falsa. Tre utila se oni komencas supozante *tion kontraŭan* al kion oni volas pruvi: se oni atingas memkontraŭdiron, preskaŭ ĉio estas jam farita.

Mi devas averti ke ĉi tio estas *notacio trouzo*: por ke logikaj teoremoj estu tute certaj, ĉiu subderivo devas sekvigi *unu* konkludon (ne du); kaj en la hipotezo ĉe la supra derivregulo, oni ne tute scias kiu estas la konkludo (ĉu B aŭ ĉu $\neg B$?). La plej bona maniero skribi tion estus uzu *kunkajigon* por diri $B \wedge \neg B$, kaj ĉi tiu estas la konkludo kiu montras la malverecon de la originala hipotezo. Sed miaj instruistoj evitigis tiun linion.

4.9 Elnegigo

Tiu estas tre simpla, sed ĝin oni devas ankaŭ koni:

$$
\begin{array}{lll}
\text{n} & \neg\neg A & \\ \hline
 & A & \text{E}\neg\ \text{n}
\end{array}
$$

Do, kiam oni vidas la negon de la nego de io, ni rajtas forigi tiujn du sinsekvajn negaciojn.

Memoru ke la negacio de "*ĉi tio estas blanka*" ne estas "*ĉi tio estas nigra*" sed "*ĉi tio ne estas blanka*".

4.10 Ne plu reguloj

Ĝis tie ĉi la bazaj derivreguloj. Aliaj ekzistas por pli kompleksaj aferoj (temas pri *kvantoroj* kaj du pri *vero* kaj *falso*, kiujn mi klarigos poste), sed ĉi tiuj naŭ estas sufiĉaj por provi pruvi la validecon de iu ajn derivo en tiu dokumento (escepte tiuj pri kvantoroj...).

Rememoru ke ne plu reguloj estas bezonataj: oni ne povas ŝanĝi de $A \lor \neg A$ al ■ (*vero*) direkte, nek de $\neg(A \lor B)$ al $\neg A \land \neg B$, nek uzi asocian, distributan aŭ komutan regulon. Oni devas agi paŝon post paŝo; nek eĉ la simplaj ŝanĝoj estas permesataj (dume). Kial? Ĉar plej eble ili ne estas tiom simplaj kiom vi kredas: oni komprenos tion kiam estos pruvenda ke $A \lor \neg A$ estas ĉiam vera... (ĉe la sekva sekcio).

5 Klarigitaj ekzercoj

Jen ekzercoj el pluraj niveloj, klarigitaj iom post iom. Se vi volas eĉ plu ekzemplojn (sed ne komentitajn), vidu la lastan sekcion. Kion mi penas rakonti ne estas la reguloj, sed la maniero pensi por ke oni divenos la magian ideon kiu solvas problemon.

Ĉi tio estas kion mi plej bedaŭris kiam mi devis lerni naturan dedukton.

5.1 Iu tre simpla. $P,\ P \Rightarrow Q \vdash P \land Q$

La solvo al $P,\ P \Rightarrow Q \vdash P \land Q$ estas:

1	P	
2	$P \Rightarrow Q$	
3	Q	E$\Rightarrow$ 2,1
4	$P \land Q$	I$\land$ 1,3

Jen oni ne devas tro pensadi, nur devas bone uzi la regulojn kaj iliajn klarigojn.

Unue, komprenu kion ni estis demandita: oni diras ke nun okazas *du* aĵojn, la unua estas P kaj la dua $P \Rightarrow Q$ (ili estas la du formulojn verkitajn maldekstre de la simbolo $\vdash$). Ĉi tiujn oni devas noti, unu po linio, ĉar ĉe tiu derivo, ili estos ĉiam certaj (tion ŝatante aŭ ne).

La celo de tiu derivo estas sciiĝi ke $P \land Q$ ankaŭ certas, ĉar oni aldiris ke kiam P kaj $P \Rightarrow Q$ estas certaj, tiam $P \land Q$ ankaŭ estas vera, kaj ni volas pruvi ke tio estas prava. Videble, oni fine atingis tion, ĉar en la lasta linio estas verkita formulo $P \land Q$.

Nu, kiel ni sekvos? Oni devas ekscii al kie oni volas aliri. Se $P \land Q$ devas certi, tiam ambaŭ P kaj Q devos certi; do oni okupu por pruvi ke ili ja certas.

P certas, ĉar estas fakto dirite al ni komence; ĝi estas skribita en linio 1.

Sed neniu diris al ni ke Q ankaŭ certu. Kion oni diris pri Q? Serĉinte ĝin en linioj 1 kaj 2, oni nur konas ke Q certas kiam P okazas (tion diras la linio 2). Sed P ja estas vera, do oni povas uzi unu el la reguloj por dedukti Q el $P \Rightarrow Q$ kaj P. Rimarku la plej gravan ŝanĝon ĉe la transformo de $P \Rightarrow Q$ al Q: ĉe la dua formulo, implikacion simbolon oni ne jam uzis; do regulo kiun oni bezonas estas la nomata *forigo de implikacio*, aŭ *elimplikaciigo*.

Por uzi tiun derivregulon, oni konsultas ĝian difinon, kaj eltrovas ke en novan linion oni devas meti la Q, kaj kiel klarigo $E \Rightarrow\ 2,1$ estu skribita dekstre. La E estas pro la angla *elimination* (aŭ la esperanta *el-*), la $\Rightarrow$ estas pro *implikacio*, la unua numero estas tiu el la linio kiu enhavas implikacion ($P \Rightarrow Q$), kaj la dua numero, el la linio kiu diras la konatan veraĵon (P). Estus malkorekte metu ilin turnite ($E \Rightarrow\ 1,2$), ĉar la difino de la regulo esprimas ke linio kiu havas la implikacion estu citita unue.

Jam aplikite la regulon, oni scias tri veraĵojn: ke P, ke $P \Rightarrow Q$, kaj ke Q. Ĉiuj estas same certaj. Nun ni estas pli proksime al nia celo, $P \wedge Q$, ĉar ni ja scias ke P kaj Q estas veraĵoj, do $P \wedge Q$ ankaŭ devas esti (memvideble). Ĉe la formulo ni serĉadas estas signo de konjunkcio ($\wedge$) kiun oni mankas, do uzu *kunkajigon* (longe nomata *enigo de konjunkcio*) por ebligi aserti ke $P \wedge Q$ pravas ĉar P certas kaj Q same. Kiel klarigo oni metas $I\wedge\ 1,3$ (linio kiu diras ke P, kaj tiu kiu diras ke Q). Ne eblas meti $I\wedge\ 3,1$; tio estus por aserti $Q \wedge P$, kio ne estas nia pruvenda formulo.

Tiam jam scias 4 certajn aĵojn: P, $P \Rightarrow Q$, Q, kaj $P \wedge Q$. Eblas daŭrigi nian eltrovadon de veraĵoj, sed ni jam finiĝis, ĉar oni demandis al ni pruvi la verecon de $P \wedge Q$, kaj oni jam atingis ĝin (ĉe linio 4). Do, tiu estos la lasta linio, kaj oni ne devas plu skribi.

Ha, jen ĉi tiu ekzemplo pervorte: "*ĉi tiam estas somero, kaj ĉe somero estas varma. Do, ĉi tiam estas somero kaj estas varma*".

5.2 Iomete pli kompleksa. $P \wedge Q \Rightarrow R,\ Q \Rightarrow P,\ Q \vdash R$

Provu vi mem solvi $P \wedge Q \Rightarrow R,\ Q \Rightarrow P,\ Q \vdash R$. Poste vidu ĝian solvon:

1	$P \wedge Q \Rightarrow R$	
2	$Q \Rightarrow P$	
3	Q	
4	P	E$\Rightarrow$ 2,3
5	$P \wedge Q$	I$\wedge$ 4,3
6	R	E$\Rightarrow$ 1,5

La nura rimedo por atingi R estas uzante la unuan formulon, $P \wedge Q \Rightarrow R$, sed oni nur povas uzi ĝin kiam $P \wedge Q$ certas, do klopodu pruvi ĝian certecon.

Ni scias ke $Q \Rightarrow P$ (linio 2) kaj ke Q (linio 3), do ni deduktas ke P. Ĉar nun P certas kaj ankaŭ Q, do ankaŭ $P \wedge Q$. Ĝis nun tio similas al la antaŭa ekzerco.

Laste, ni havas $P \wedge Q \Rightarrow R$, kaj scias ke $P \wedge Q$, do eblas diri (fine) ke R.

5.3 Jam supozante aĵojn. $P \Rightarrow Q,\ Q \Rightarrow R \vdash P \Rightarrow Q \wedge R$

Ĉi tiu, $P \Rightarrow Q,\ Q \Rightarrow R \vdash P \Rightarrow Q \wedge R$, estas pli interesa:

1	$P \Rightarrow Q$	
2	$Q \Rightarrow R$	
3	$\quad P$	H
4	$\quad Q$	E$\Rightarrow$ 1,3
5	$\quad R$	E$\Rightarrow$ 2,4
6	$\quad Q \wedge R$	I$\wedge$ 4,5
7	$P \Rightarrow Q \wedge R$	I$\Rightarrow$ 3,6

Notu la jenajn detalojn:

- Ni havas nenian informon pri io ajn kio certas nun (ni mankas formulojn kiajn P, aŭ $Q \wedge R$, ktp.). Oni nur aldiras al ni ideojn kiajn ke *se okazus P, tiam ankaŭ okazus Q.*
- Simile, kio ni devas pruvi ne estas ke *ĵus nun io okazas*, sed ke *se okazus P, tiam Q kaj R estus certaj.*
- $P \Rightarrow Q \wedge R$ estas implikacio (*io entenas ion*), ĉar operatoro $\Rightarrow$ havas malpli prioritaton ol $\wedge$. Estas grava eraro interpreti tiun formulon kvazaŭ $(P \Rightarrow Q) \wedge R$.

Ĉar la formulon ni serĉas estas implikacio ($P \Rightarrow Q \wedge R$), ni devos uzi la *kunimplikaciigon*, sed tiu regulo necesas subderivon (vidu ĝian difinon).

Kompreni kial, ne estas malfacile: $P \Rightarrow Q \wedge R$ diras ke *se P okazas, tiam okazas $Q \wedge R$*, do unue oni devos supozi ke ja okazas P. Tiam oni klopodu ke, ĉe la okazo kiam P certas, ankaŭ certas $Q \wedge R$. Tion atingite, oni aplikas la regulon por restigi ĉion bone skribite: $P \Rightarrow Q \wedge R$.

Tial, ĉe linio 3 oni faras hipotezon (klarigita per la dekstra H): supozu ke P certas. Nun komencas subderivon, ĉe kie oni povas uzi ĉiun veraĵon el la patra derivo (linioj 1 kaj 2 ĉe tiu okazo), kaj ankaŭ povas uzi P kvazaŭ ĝi estus certa.

Oni faris tiun hipotezon celante scii ke $Q \wedge R$, do oni deduktas ĝin simile al la antaŭaj ekzemploj. Notu la uzadon de veraĵojn el ene kaj ekstere de la subderivo, kaj ankaŭ ke, ĝis fino de la subderivo, tiu vertikala maldekstra linio devas esti metita.

Ĉe linio 6 oni jam havas $Q \wedge R$, kion ni volis. Uzante la derivregulon de *kunimplikaciigo*, oni eliras el tiu subderivo, asertante ke *se la hipotezo estas certa, tiam ankaŭ certas io kion ni deduktis el ĝi.* Oni malmetas la vertikalan linion, ĉar $P \Rightarrow Q \wedge R$ estas ĉiam certa (sendepende je ĉu P estas vera aŭ ne). La uzata klarigo, $I \Rightarrow\ 3, 6$, diras ke estas linio 3 kie oni faris la supozon, kaj 6 la linio kie oni divenis ion interesan kio okazas farinte tiun supozon.

$P \Rightarrow Q \wedge R$ estas kion ni serĉis, do oni jam finis. La fino estas same kiel antaŭe, ĉar oni ja estas ekstere de subderivo.

5.4 Uzante iteracion. $P \vdash Q \Rightarrow P$

Tiu ĉi estas tre mallonga: $P \vdash Q \Rightarrow P$. Jen solvo:

1	P	
2	$\quad Q$	H
3	$\quad P$	IT 1
4	$Q \Rightarrow P$	I$\Rightarrow$ 2,3

La vojo estas direkta: oni supozu Q, kaj vidu ke, tiuokaze, estas prava P. Jen sekreteto: P ĉiam certas, ĉu supozinte Q aŭ ĉu ne.

Oni devos uzi *kunimplikaciigon*, sed tio necesas hipotezon, kaj, kelkaj linioj sube, la rezulton supozi tion. Nur tiam oni povos fermi la subderivon.

Post ĝia malfermo (linio 2), oni faru ion por restigi skribe ke P. Ĉar ni jam havas ĝin verkita en linio 1, simple metu P denove kaj klarigu per *IT* 1, kio signifas "*ĉi tion mi kopiis de linio 1*". La *IT* estas pro *iteracio*.

Jam oni plenumas la kondiĉojn por apliki la derivregulon, do oni apliku ĝin, eliru el subderivo, kaj jam estas finita.

5.5 Redukto al absurdo. $P \Rightarrow Q,\ \neg Q \vdash \neg P$

Tiu estas utilega tekniko. La validecon de $P \Rightarrow Q,\ \neg Q \vdash \neg P$ oni pruvu per:

1	$P \Rightarrow Q$	
2	$\neg Q$	
3	$\quad P$	H
4	$\quad Q$	E$\Rightarrow$ 1,3
5	$\quad \neg Q$	IT 2
6	$\neg P$	I$\neg$ 3,4,5

Atingenda estas $\neg P$, kiu estas *la nego de io*, tial oni devos uzi la regulon de *kunnegigo*, konata per *redukto al absurdo* (kaj ankaŭ *enigo de negacio*).

La maniero fari tion estos supozi tion kontraŭan al $\neg P$ (kio estas P) kaj atingi memkontraŭdiron. Supozante P oni atingas Q (per *elimplikaciigo*), kaj, ĉar oni ankaŭ havas $\neg Q$, eblas apliki la regulon. Tiu $\neg Q$ devos esti metita en la subderivon per *iteracio*, por ke ĝi estu kun la Q kaj *en* la subderivo. Ĉio kio estas interne de la subderivo estas sekvo de P, do estas grava rimarki ke tiel Q kiel $\neg Q$ ambaŭ estas ĝia sekvo.

Pri la *kunnegigo*, la maniero klarigi la regulon estas metante la linionumeron kie komencas la supozo (malprava), kaj la numerojn el la du linioj kie oni vidis la kontraŭdiron. La konkludo de ĉi tiu regulo estas tio kontraŭa al kio oni supozis, tiuokaze $\neg P$, do la procedo jen finiĝas.

Tiu rezonado verŝajne oni faras senpense. Pervorte, ĝi estus kiel: "*kompreneble ke $\neg P$, ĉar se estus P, do Q, kaj vi diris ke $\neg Q$, do ne eblas ke P*".

5.6 Kun subderivoj. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \vdash Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

La afero malfaciliĝas. Jen la solvo de $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \vdash Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$:

1	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	
2	$\vert\ \underline{Q}$	H
3	$\vert\ \vert\ \underline{P}$	H
4	$\vert\ \vert\ Q \Rightarrow R$	E$\Rightarrow$ 1,3
5	$\vert\ \vert\ R$	E$\Rightarrow$ 4,2
6	$\vert\ P \Rightarrow R$	I$\Rightarrow$ 3,5
7	$Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$	I$\Rightarrow$ 2,6

Unue: ĉi tie oni nur uzos la du derivregulojn kiuj helpas enigi kaj forigi implikaciojn, ĉar ĝi estas la sola operatoro kiun oni havas.

Oni volas atingi $Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$, do oni devos fari hipotezon Q ĉe kie oni devos montri ke $P \Rightarrow R$. Faru tion nun por faciligi la problemon: oni malfermas la subderivon en linio 2. Oni ne fermos ĝin ĝis kiam oni scias ke $P \Rightarrow R$ estas certa.

Nun la problemo estas iom pli facila. Oni bezonas pruvi $P \Rightarrow R$, kaj havas du liniojn kun du veraĵoj: la unua diras $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$, kaj la dua Q.

Kiel povas oni alproksimiĝi al $P \Rightarrow R$? Nu, same kiel iam ajn: ni devas supozi ke P, kaj eltrovi ke R, iel. Eĉ se tio ne ŝajnas facila, estas kion oni faru, ĉar la *kunimplikaciigo* tiel funkcias. Do, malfermu alian hipotezon, nun supozante ke P, kaj eble oni atingos R. Ĉi tiu estas hipotezo en hipotezo, tamen tio estas nenia problemo.

Skribinte la linio 3, kaj, metite en *subsubderivo*, oni disponas de tri scioj: ke $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$, ke Q, kaj ke P. Oni devas pruvi ke R. Ne estas tiom malfacile, ĉu? Se oni scias ke P, uzante *elimplikaciigon* kun linio 1 oni ricevos la certan formulon $Q \Rightarrow R$. Ĉar Q ankaŭ certas (linio 2), oni povas reapliki tiun regulon por ekscii ke R.

Videble, supozinte P oni atingis la konkludon R, do eblas skribi en nova linio ke $P \Rightarrow R$, kion ni serĉadis. Nun jam eliris el la subsubderivo, kaj nur estas sub la supozo ke Q certas. Ĉar oni vidas ke tiu supozo entenas la certecon de la formulo $P \Rightarrow R$, oni povas eliri tiun subderivon konkludante ke $Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$.

$Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ estis precipe kion oni volis pruvi, do jam estas finata la derivo.

5.7 Iu kun provo per okazoj. $P \vee (Q \wedge R) \vdash P \vee Q$

Oni uzu la plej malfacilan derivregulon, *elaŭigon*. $P \vee (Q \wedge R) \vdash P \vee Q$ solvita:

1	$P \vee (Q \wedge R)$	
2	P	H
3	$P \vee Q$	I$\vee$ 2
4	$Q \wedge R$	H
5	Q	E$\wedge$ 4
6	$P \vee Q$	I$\vee$ 5
7	$P \vee Q$	E$\vee$ 1,3,6

Vi jam scias la regulojn, do mi klarigas la manieron pensi de iu homo, kiu eble ne komprenas naturan dedukton, sed estas iom pensema:

Oni devas pruvi ke $P \vee Q$ ĉiam certas. La maldekstra esprimo, $P \vee (Q \wedge R)$, povas certiĝi pro du motivoj:

- se ĝi certas pro la vero de P, tiam $P \vee Q$ ja estas certa.
- se ĝi certas pro la vero de $Q \wedge R$, tiam Q kaj R estas ambaŭ certaj, do $P \vee Q$ certas per Q.

Do, ĉiel, $P \vee Q$ estas vera.

Nun, la cetero estas traduki tion al logika lingvo, sekvante la saman ordon kiel antaŭe, kaj iom post iom.

Oni komencas pruvante unu vojo, poste, la alian, kaj fine oni aplikas *elaŭigon*. Por klarigi la regulon oni devas skribi la linion kiu enhavas la disjunkcion, kaj la du liniojn el ene de ĉiu subderivo kie montriĝas ke, supozante iun aĵon aŭ la alian, la rezulto estas la samo.

Rimarku ke, eĉ se oni eltrovis ke $P \Rightarrow P \vee Q$ kaj ke $Q \wedge R \Rightarrow P \vee Q$, ne estas necese uzi *kunimplikaciigon* por restigi skribe tion.

La plej malfacilo el la *provo per okazoj* normale estas decidi, kiun esprimon oni provos pruvi en ambaŭ okazoj. Ĝi estu la sama en ambaŭ okazoj!

5.8 Iu por pensi. $L \wedge M \Rightarrow \neg P,\ I \Rightarrow P,\ M,\ I \vdash \neg L$

Provu pripensi $L \wedge M \Rightarrow \neg P,\ I \Rightarrow P,\ M,\ I \vdash \neg L$; poste skribu ĝin en papero. Ĝi restas:

1	$L \wedge M \Rightarrow \neg P$	
2	$I \Rightarrow P$	
3	M	
4	I	
5	$\quad L$	H
6	$\quad L \wedge M$	I$\wedge$ 5,3
7	$\quad \neg P$	E$\Rightarrow$ 1,6
8	$\quad P$	E$\Rightarrow$ 2,4
9	$\neg L$	I$\neg$ 5,7,8

Pervorte: "*se vi uzas Linukson (Linux) kaj Mozilon (Mozilla) kiel foliumilo, vi evitas problemojn. Tamen, se vi uzas 'Internet Explorer' vi havos problemojn. Nun vi uzas Mozilon, sed iam ankaŭ 'Internet Explorer'. Do, mi scias ke vi ne uzas Linukson*".

Eble tio ŝajnas al vi evidenta: "*kompreneble, ĉar IE ne estas ĉe Linukso*", sed notu ke mi neniam diris tion. La $I \Rightarrow \neg L$ estas nenie.

La rimedon kiun vi devos sekvi dum vi pripensas la ekzercon estas:

1. Mi bezonas pruvi $\neg L$, kio estas nego de io. Estas videbla nenia regulo kiel *io entenas* $\neg L$, kiu ebligas min atingi ĝin direkte. Oni devos uzi alian metodon, ekzemple *kunnegigo* (*redukto al absurdo*): supozu ke mi ja uzas Linukson.

2. Ĉe la okazo kiam mi uzas Linukson, mi uzus ambaŭ Linukson kaj Mozilon, ĉar mi jam uzis Mozilon antaŭe (tiu estas la tria veraĵo skribita en la problema esprimo).

3. Uzante Linukson kaj Mozilon, mi ne havos komputikajn problemojn, ĉar $L \wedge M \Rightarrow \neg P$.

4. Sed mi ankaŭ uzis Internet Explorer (kvara veraĵo), kaj, ĉar IE kunportas problemojn, mi havos problemojn. P.

5. Mi atingis memkontraŭdiron: $\neg P$ kaj P. Do, kio vere okazas estas ke mia supozo pri uzado de Linukso estas malkorekta: prave $\neg L$.

Nun vi nur devas sekvi la saman proceduron, sed skribante ĝin paŝon post paŝo, kaj uzante la regulojn. Kion vi ricevos estos kiel la supran figuron, kiu havas precipe 5 procedajn liniojn (ĉar la unuaj 4 estas por kopii la veraĵojn). Ĉiu linio rilatas al ĉiu paŝo kiun mi klarigis tie.

5.9 Malplena maldekstra parto. $\vdash P \Rightarrow P$

Pruvi $\vdash P \Rightarrow P$ estas tre facila kaj mallonga:

1	$\quad P$	H
2	$\quad P$	IT 1
3	$P \Rightarrow P$	I$\Rightarrow$ 1,2

Tia ekzerco ankoraŭ ne aperis: videble, la maldekstra parto de la derivo estas malplena. Tio signifas ke oni estas dirita nenia veraĵo kiun oni povas uzi por pruvi $P \Rightarrow P$. Kial? Nu, ĉar $P \Rightarrow P$ estas ĉiam certa, sendepende de la valoro de P aŭ la aliaj formuloj.

Estas plej komode kaj facile solvi tiajn derivojn, ĉar oni komencas la laboron direkte kun la formulon oni volas atingi. Sed atentu, ĉar kelkaj *absolutaj veroj* (kiaj ĉiam estas pravaj) estas ege malfacile kaj bezonas longajn pruvojn.

Notu: ĉiam kiam la maldekstra parto estas malplena, oni devas komenci per hipotezo (kion alian oni povus fari?).

Por atingi la pruvon de $P \Rightarrow P$ oni agas kiel antaŭe: supozu P kaj provu atingi la veron de P. Ĉar oni ĵus supozis ĝin ĉe la unua linio, oni nur devas uzi la regulon de *iteracio* por kopii ĝin al interne, kaj finu la subderivon per *kunimplikaciigo*. Jam estas ĉio farita, per tri linioj.

Rimarku ke $P \Rightarrow P$ estas certa ĉar $\blacksquare \Rightarrow \blacksquare$ kaj $\square \Rightarrow \square$. Mi profitas por memorigi ke ankaŭ $\square \Rightarrow \blacksquare$, sed $\blacksquare \not\Rightarrow \square$.

5.10 Supozu tion kontraŭan. $\vdash \neg(P \wedge \neg P)$

Jen iu ankaŭ facila,$\vdash \neg(P \wedge \neg P)$. Oni agas tiel:

1	$\quad P \wedge \neg P$	H
2	$\quad P$	E$\wedge$ 1
3	$\quad \neg P$	E$\wedge$ 1
4	$\neg(P \wedge \neg P)$	I$\neg$ 1,2

Ĉiuj el ni scias ke ne eblas okazi du kontraŭajn aĵojn samtempe, sed, kial oni povas pruvi tion? Per *redukto al absurdo*:

Supozu ke ja okazas $P \wedge \neg P$. Tiam okazas P kaj $\neg P$, ambaŭ samtempe, kio estas memkontraŭdiron. Do, nian supozon ne eblas certu, do estas falsa. Tiel oni pruvas $\neg(P \wedge \neg P)$.

Vidante ion tiom *klara* kaj *memkomprenebla* kiom $\neg(P \wedge \neg P)$, tiam tio kontraŭa estos *klare* falsa kaj absurda. Do vi facile eblos pruvi ke tio ne sin tenas kaj memkontraŭdiras. Poste, oni povos certigi ke originala formulo estas certa ĉar ĝia kontraŭa estas falsa.

5.11 Tiu ŝajnas facila. $\vdash P \lor \neg P$

Ĉu $\vdash P \lor \neg P$ estas tiom facila?

1	$\neg(P \lor \neg P)$	H
2	P	H
3	$P \lor \neg P$	I$\lor$ 2
4	$\neg(P \lor \neg P)$	IT 1
5	$\neg P$	I$\neg$ 2,3,4
6	$\neg P$	H
7	$P \lor \neg P$	I$\lor$ 6
8	$\neg(P \lor \neg P)$	IT 1
9	$\neg\neg P$	I$\neg$ 6,7,8
10	P	E$\neg$ 9
11	$\neg\neg(P \lor \neg P)$	I$\neg$ 1,5,10
12	$P \lor \neg P$	E$\neg$ 11

Unu el la plej simplaj kaj longaj kiuj mi trovis. Ŝajnas eĉ ne necese pruvadi tion, ĉar iu ajn scias ke el la du aĵojn "*hodiaŭ estas ĵaŭdo*" kaj "*hodiaŭ ne estas ĵaŭdo*", unu el ili estas certa (ne eblas ke ambaŭ estu falsaj samtempe).

Oni povus unue pensi en la rimedon de *provo per okazoj*, ĉar el P eblas eltiri $P \lor \neg P$, kaj el $\neg P$ eltiri $P \lor \neg P$, do, la saman formulon. Sed tio malutilas, ĉar derivregulo de *provo per okazoj* estas *elaŭigo* kaj oni mankas iun aŭon por eligi; fakte, oni nek havas la certan formulon $A \lor B$ tiel ke $A \Rightarrow C$ kaj $B \Rightarrow C$, kiel la regulo bezonas. Plej fakte, oni havas neniun formulon kies certecon oni povas aserti (la maldekstra parto de la derivo estas malplena).

Oni scias ke ĉe la komenco, hipotezon devas fari (ĉar ne estas alia vojo). Estas "*sufiĉe*" klara por ni ke $P \lor \neg P$ certas, do verŝajne ĝian kontraŭan, $\neg(P \lor \neg P)$, estos facile pruvebla falsa. Do oni uzos *redukton al absurdo*: supozinte tion ĉe linio 1, oni devas atingi memkontraŭdiron, iu ajn.

Mi celis atingi kontraŭdiron $\neg P$ kaj P. Tamen, oni mankas tiujn formulojn; kie ni trovigos ilin? Nu, eblas refari *redukton al absurdo*: por ekvidi $\neg P$, supozu P por atingi memkontraŭdiron. Kiel antaŭe, estas utilege profiti eblojn de *kunaŭigo*: supozinte P, oni povas ŝanĝigi ĝin al $P \lor \neg P$ por serĉi kontraŭdiron. Ĉar oni havas la $\neg(P \lor \neg P)$ tute supre, oni rajtas uzi ĝin por fine pruvi $\neg P$. Same oni faras por atingi P, sed tiuokaze supozante $\neg P$.

Ricevite P kaj $\neg P$ post la supozado de $\neg(P \lor \neg P)$, oni vidas ke tiu formulo maleblas certi, do ĝia nego, $\neg\neg(P \lor \neg P)$, ja certas. Per *elnegigo*, fine estas trovita serĉatan formulon: $P \lor \neg P$.

Mi agis tiel por igi la skemon iom simetria, sed oni ja povas solvi la problemon per malpliaj paŝoj serĉante alian memkontraŭdiron, ekzemple $P \lor \neg P$ kaj $\neg(P \lor$

$\neg P$). Tiel ĝi restus:

1	$\mid\ \neg(P \lor \neg P)$	H
2	$\mid\ \mid\ P$	H
3	$\mid\ \mid\ P \lor \neg P$	I$\lor$ 2
4	$\mid\ \mid\ \neg(P \lor \neg P)$	IT 1
5	$\mid\ \neg P$	I$\neg$ 2,3,4
6	$\mid\ P \lor \neg P$	I$\lor$ 5
7	$\mid\ \neg(P \lor \neg P)$	IT 1
8	$\neg\neg(P \lor \neg P)$	I$\neg$ 1,6,7
9	$P \lor \neg P$	E$\neg$ 8

5.12 Iu interesa. $P \lor Q,\ \neg P \vdash Q$

Ankaŭ ŝajnas facila: $P \lor Q,\ \neg P \vdash Q$. Jen:

1	$P \lor Q$	
2	$\neg P$	
3	$\mid\ P$	H
4	$\mid\ \mid\ \neg Q$	H
5	$\mid\ \mid\ \neg P$	IT 2
6	$\mid\ \mid\ P$	IT 3
7	$\mid\ \neg\neg Q$	I$\neg$ 4,5,6
8	$\mid\ Q$	E$\neg$ 7
9	$\mid\ Q$	H
10	$\mid\ Q$	IT 9
11	Q	E$\lor$ 1,8,10

Estas facilege kompreneble por iu ajn: certas $P \lor Q$, sed P estas falsa, do la vero estas Q.

Diversaj metodoj ekzistas, sed iam oni devos uzi *elaŭigon* por ion fari kun $P \lor Q$. Provu pruvi ke ambaŭ P kaj Q kondukas al la sama loko, kiu estos nian celan formulon Q (ĉar eblas iri direkte al Q, do profitu).

Do oni malfermas subderivon supozante P, kaj celas eltrovi ke Q. Ne estas tre kompleksa, ĉar oni havas la $\neg P$ en linio 2; tio helpas kontraŭdiri ion ajn. Oni serĉas Q, do supozu $\neg Q$ kaj per *kunnegigo* ricevu $\neg\neg Q$, kiu estas Q.

La alian vojon, supozinte Q certa, kondukas direkte al Q.

Do, ambaŭ vojoj iras al Q kaj per *elaŭigo* oni pruvas ke Q ĉiam certas.

5.13 Tiu aperis en mia ekzameno. $A \lor B,\ A \Rightarrow C,\ \neg D \Rightarrow \neg B \vdash C \lor D$

Ĉe la fina ekzameno de *ILO* oni demandis al mi $A \lor B,\ A \Rightarrow C,\ \neg D \Rightarrow \neg B \vdash C \lor D$, kaj mi pasigis multan, multan tempon ĝis mi fine sukcesis:

1	$A \lor B$	
2	$A \Rightarrow C$	
3	$\neg D \Rightarrow \neg B$	
4	A	H
5	C	E$\Rightarrow$ 2,4
6	$C \lor D$	I$\lor$ 5
7	B	H
8	$\neg D$	H
9	$\neg B$	E$\Rightarrow$ 3,8
10	B	IT 7
11	$\neg\neg D$	I$\neg$ 8,9,10
12	D	E$\neg$ 11
13	$C \lor D$	I$\lor$ 12
14	$C \lor D$	E$\lor$ 1,6,13

Rimarku ke la rezulton ni serĉas, $C \lor D$, estas aŭo. Ĉar vi jam konas *kunaŭigon*, vi povus simple serĉi C, kaj poste uzi tiun regulon por eltrovi $C \lor D$. Se vi ne trovus ke C certas, vi eblus provi kun D, ĉar se D certas, tiam $C \lor D$ ankaŭ estas, kaj oni finas tie.

Bedaŭrinde, C ne estas ĉiam certa, nek D estas ĉiam certa (tamen, $C \lor D$ ja ĉiam certas, kaj tio estas kion oni volas pruvi). Tion komprenite, oni devos serĉi alian rimedon kiu prilaboras kun ambaŭ formulojn, C kaj D, samtempe, ĉar ŝajne se oni prenas unu solan sen uzi la alian, ĝi ne aldonas multon da informo.

Por uzi $A \lor B$ oni aplikos *provon per okazoj*. Oni provos ekscii ke tiel A kiel B kondukas al $C \lor D$, ĉar se oni tion atingas, ne plua laboro restas.

A entenas C, kaj se C estas vera, tiam ankaŭ veras $C \lor D$, do A entenas $C \lor D$.

Por B, kion ni scias ne rilatas ĝin al C sed al D. Oni volas $C \lor D$. Ŝajnas malfacilege ke $C \lor D$ certas pro C, do oni provos certigi nur D. Por tio, oni uzu *redukton al absurdo*: supozu D falsa, tiam certas $\neg B$ pro formulo el linio 3. Sed oni estas supozinte la certecon de B, do nia hipotezo $\neg D$ ne estu certa. Do D ja certas, kaj konsekvence ankaŭ $C \vee D$.

Ĉar $A \vee B$ ja certas, kaj ambaŭ vojoj kondukas al $C \vee D$, oni fine vidas ke $C \vee D$ ĉiam estas certa.

Se vi estas lerta laboristo de logikaj formuloj, eble vi eksciiĝis ke $\neg D \Rightarrow \neg B$ estas $B \Rightarrow D$. Tio tre simpligas la problemon kaj helpas ĝin kompreni pli frue. Tamen, vi ne rajtas ŝanĝi $\neg D \Rightarrow \neg B$ per $B \Rightarrow D$ direkte; vi faru tion paŝon post paŝo por pli ĝui la logikon.

5.14 Iu "mallonga". $A \iff B \vdash (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

Ŝajnas facila: se du esprimoj estas ekvivalentaj, tio estas ĉar ambaŭ certas, aŭ ambaŭ falsas. Mi sukcesis pruvi la validecon de $A \iff B \vdash (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ tiel:

1	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	
2	$\neg(A \vee \neg A)$	H
3	A	H
4	$A \vee \neg A$	I$\vee$ 3
5	$\neg(A \vee \neg A)$	IT 2
6	$\neg A$	I$\neg$ 3,4,5
7	$A \vee \neg A$	I$\vee$ 6
8	$\neg(A \vee \neg A)$	IT 2
9	$\neg\neg(A \vee \neg A)$	I$\neg$ 2,7,8
10	$A \vee \neg A$	E$\neg$ 9
11	A	H
12	$A \Rightarrow B$	E$\wedge$ 1
13	B	E$\Rightarrow$ 12,11
14	$A \wedge B$	I$\wedge$ 11,13
15	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$	I$\vee$ 14
16	$\neg A$	H
17	B	H
18	$B \Rightarrow A$	E$\wedge$ 1
19	A	E$\Rightarrow$ 18,17
20	$\neg A$	IT 16
21	$\neg B$	I$\neg$ 17,19,20
22	$\neg A \wedge \neg B$	I$\wedge$ 16,21
23	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$	I$\vee$ 22
24	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$	E$\vee$ 10,15,23

Unue: oni ne metu $A \iff B$ ĉar ne havas derivregulojn por la $\iff$. Sed ĝi estas malplej uzata, do kiam $\iff$ aperas, oni rajtas ŝanĝi ĝin per $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, kiu estas la samo.

Nu, tio estas la sola ideo mi ekpensis... Mi lasas al vi ekzercon serĉi pli mallongan formon (se ĝi ekzistas). Kion mi faris estas restigi skribe ke $A \vee \neg A$ ĉiam certas (tiu ekzerco jam aperis, jen mi ripetis la samajn paŝojn). Jam konante $A \vee \neg A$, mi pruvas ke tiel okazo A kiel okazo $\neg A$ alportas al la sama formulo, kiu estas la solvo.

6 Malkorektaĵoj

Jen komunaj eraroj kiujn vi ne faru. Memoru ke logika instruisto korektos viajn ekzercojn per *certo* aŭ *falso*, do lernu faradi ĉion perfekte.

6.1 Enigo kaj forigo de *"tio kio plej plaĉas min"*

La derivreguloj de *enigo* kaj *forigo* ne eblas verki kion vi plej ŝatas, ĉar ilia celo estas nur helpigi uzi aŭ generi formulon kun konkreta operatoro.

Tial, se vi havas P, ne diru "*mi nun faras* kunnegigon *kaj eltrovas* $\neg P$*, kiun mi ĵus bezonis*". Ekzistas kelkaj kondiĉoj por ĉiu regulo, kaj se ili ne estas plenumitaj, vi ne povas apliki la regulon.

Jen ekzemplo (pardonu se bildoj havas hispanajn notojn): la derivregulo *elimplikaciigo* ne ebligas atingi formulon el la unua linio.

1	$P \Rightarrow Q \wedge R$	
2	$Q \wedge R$	E$\Rightarrow$ 1,1

$\bigotimes$ *INCORRECTO* $\bigotimes$

Tio estus permesita, se oni vere scius ke ĉiam certas P; tial oni povus apliki la regulon, bone skribinte liniajn numerojn.

6.2 Ion kopii el malatingebla subderivo

Interne de la ĉefa pruvo (kiu trairas de la unua ĝis la lasta linio) oni povas malfermi *filajn derivojn* (*subderivojn*). Interne de subderivo oni ankaŭ povas havi *subsubderivon*, kiu havus kiel patro la subderivo kaj kiel avo la ĉefa derivo.

Por ekzempli, jen la solvon de $A \vee B,\ A \Rightarrow C,\ \neg D \Rightarrow \neg B \vdash C \vee D$:

1	$A \lor B$	
2	$A \Rightarrow C$	
3	$\neg D \Rightarrow \neg B$	
4	$\mid\ A$	H
5	$\mid\ C$	E$\Rightarrow$ 2,4
6	$\mid\ C \lor D$	I$\lor$ 5
7	$\mid\ B$	H
8	$\mid\ \mid\ \neg D$	H
9	$\mid\ \mid\ \neg B$	E$\Rightarrow$ 3,8
10	$\mid\ \mid\ B$	IT 7
11	$\mid\ \neg\neg D$	I$\neg$ 8,9,10
12	$\mid\ D$	E$\neg$ 11
13	$\mid\ C \lor D$	I$\lor$ 12
14	$C \lor D$	E$\lor$ 1,6,13

Nu, iu ajn derivo nur povas atingi formulojn el ene de si mem, el ĝia patro, el la patro de ĝia patro, el la patro de la patro de ĝia patro, ... Oni eble konas ĉi tiujn ulojn per *prapatroj*, do *derivo povas atingi sin mem kaj siajn prapatrojn.*

Ekzemple, estante ĉe linio 10, la reguloj povas uzi formulojn el la jenaj lokoj:

- el la nuna derivo (linioj 8 kaj 9, ĝisnune).
- el la derivo patra de la 8-10, tiu estas, la linio 7.
- el la derivo patra de kiu komencas en linio 7, do, linioj 1 al 3.

Neniel oni povas uzi la formulojn el la linioj 4 ĝis 6, kiu estas la derivo onkla de la nuna (frato de la patro), ĉar ĉi tiu tuta derivo estas bazita en la hipotezo ke A (linio 4), kaj oni jam finis fariĝi tiun supozon.

Ĉe logika lingvo, oni diras ke formulo A estas *aktuala* en formulo B se estante en B oni povas uzi A. Por ke ĉi tio pravu, A devas esti verkita antaŭ ol B, kaj iu prapatro el B devas esti patro de A.

Do, por pruvi $P \land Q$ vi ne rajtas fari ĉi tiel:

1	$\mid\ P$	H
2	$\mid\ \mid\ Q$	H
3	$\mid\ \mid\ P \land Q$	I$\land$ 1,2
4	$P \land Q$	IT 3

$\otimes$ *INCORRECTO* $\otimes$

6.3 Mismeti la krampojn

Kiam mi verkis la regulajn difinojn, mi uzis literojn A kaj B, sed tiuj ja povas reprezenti ian ajn esprimon.

Ekzemple, jen oni faras *kunnegigon*, kie -laŭ la regulo- oni supozas formulon A, atingas memkontraŭdiron, kaj konkludas ke $\neg A$, tio estas, la originalan formulon, sed negigitan. Oni vidu:

$$\begin{array}{r|l l} 1 & \quad P \Rightarrow Q & \quad \text{H} \\ \cline{2-2} \dots & \quad \dots & \\ \multicolumn{1}{r}{7} & \neg P \Rightarrow Q & \quad \text{I}\neg\ 1,\dots \end{array} \qquad \bigotimes \textit{INCORRECTO} \bigotimes$$

Plej eble estas klare ke la A ĉe tiu regulo reprezentas al $P \Rightarrow Q$ en ĉi tiu ekzemplo. Problemo aperas farante $\neg A$. La nego de $P \Rightarrow Q$ ne estas $\neg P \Rightarrow Q$, sed $\neg(P \Rightarrow Q)$. Estas nepre necesaj la krampoj ĉar, se oni ne metas ilin, la nego nur modifas P.

Se vi ne scias kiam metu krampojn, ilin metu ĉiam kaj poste forviŝu tiujn malnecesajn. Ekzemple, por skribi ke $\neg P \vee R$ entenas $R \wedge Q$, ĉirkaŭigu ĉiun esprimon per krampoj kaj do skribu $(\neg P \vee R) \Rightarrow (R \wedge Q)$. Tiel, vi certe maleraras. Nun lernu kiam eblas forigi krampojn, kaj forviŝu ĉiujn eblajn. Ĉe tiu okazo, la du estas sennecesaj kaj restas $\neg P \vee R \Rightarrow R \wedge Q$.

6.4 Fini en subderivo

Oni ne rajtas fini dedukton ene de subderivo. La lasta linio malhavos tiun vertikalan maldekstran linieton.

La kialo estas ke ĉio el ene de subderivo estas vera nur kiam la supozo certas, kaj la originala problemo demandis pruvi ke tio el dekstre de la $\vdash$ *ĉiam* pravas.

Jen malekzemplo de iu aŭdaca kiu volas pruvi $P \wedge Q$:

$$\begin{array}{r|l|l l} 1 & \multicolumn{2}{l}{P} & \quad \text{H} \\ \cline{2-3} 2 & & Q & \quad \text{H} \\ \cline{3-3} 3 & & P \wedge Q & \quad \text{I}\wedge\ 1{,}2 \end{array} \qquad \bigotimes \textit{INCORRECTO} \bigotimes$$

Oni supozis P, kaj poste Q. Tiuokaze, kompreneble estas certa $P \wedge Q$, sed *nur ĉe tiu okazo*. Ne eblas aserti ke $P \wedge Q$ ĉiam estas certa. Tial, oni devas fermadi la du derivojn (unue la interna, kaj poste la ekstera) por eltrovi iun konkludon kiu ĉiaokaze certas.

Nek eblus apliki tiun regulon nomatan *iteracion* ĉe linio 4. Mi jam klarigis tion antaŭe.

6.5 Malfari paŝojn

Eĉ se vi konas ekvivalentojn inter formulojn, estas plej bone se vi ne uzas ilin. Ekzemple, se vi skribu la negon de $\neg P$, ne skribu P direkte, sed metu $\neg\neg P$.

Pensu ke nenio estas tiom memvidebla, kaj ke oni povas demandi al vi pruvi derivojn kiajn $P \vdash \neg\neg P$, kie se vi povus uzi la simpligojn, vi preskaŭ ne laborus.

Ekzemple, havante $\neg(A \vee B)$ en linio, la paso al $\neg A \wedge \neg B$ ĉe la sekva estas klarigita per neniu el la 9 reguloj. Tamen, se vi sukcesas pruvi kaj kompreni ke $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$, vi eble ŝatus aldoni ĝin kiel nova regulo por uzi ĝin ĉe postaj derivoj. Mi aldonos kelkajn el tiaj ĉe sekva sekcio.

7 Iom pli kompleksa

Jen mi finos klarigojn de ĉio kion mi estis instruita (eĉ se oni ne tre uzis tion). Tio pri kvantoroj gravas, sed estas pli konfuza.

7.1 Reguloj pri vero kaj falso

Oni povas direkte uzi valorojn $\blacksquare$ (*vero*) kaj $\square$ (*falso*), kaj ankaŭ enigi aŭ forigi ilin ĉe nia derivo per simplaj reguloj.

7.1.1 Enigo de vero

Estas la plej facila:

$$\frac{}{\blacksquare}\quad \mathrm{I}\blacksquare$$

Do, ĉiam, kaj laŭ neniaj kondiĉoj, oni rajtas skribi ke $\blacksquare$ estas certa, ĉar ĝi ja estas.

7.1.2 Forigo de falso

Iu amuzanta:

$$\frac{\text{n} \quad \square}{A}\quad \mathrm{E}\square\ \text{n}$$

Klarigo: se oni atingis la konkludon ke $\square$ estas certa, oni jam atingis situacion kie oni povas elpensi ion ajn kaj aserti ke ĝi estas certa; almenaŭ tiom certa kiom la certeco de $\square$ (*falso*).

Al tiu regulo oni nomas *ex falso quodlibet sequitur*, kaj tio signifas ke "*el falso oni povas eltrovi ion ajn*".

7.2 Reguloj pri kvantoroj

Oni estas tro limigitaj se nur povas uzi P, Q, R, ... por traduki frazojn al la logika lingvo. Kvantoroj ebligos nin uzi plurajn aliajn rimedojn.

7.2.1 Kio tio estas

Mi ne ĉion povas klarigi, ĉar estas necesaj multaj aliaj konceptoj, sed mi iom klarigetos. Unue, kelkaj ŝanĝoj:

Nun oni ne nur parolos pri ĝeneralaj okazoj (*pluvas*, *estas varma*, ktp.), sed oni havos *domajnon* de konataj aĵoj, kaj diros kiu propreco estas vera por ĉiu elemento.

Ekzemple: oni havas domajnon $\{p, \ t, \ r\}$, kiu rilatas respektive al *PROLOG* (logika programlingvo), al *terminalo* (ekrano kaj klavaro por uzi foran komputilon), kaj al *retkarto* (ilo por retigi komputilojn). p, t, r.

Oni aldonas *predikatan literon* (ili ne plu estas nomataj *propoziciaj literoj*) E, tiel ke esprimo Ex (legata "E *de* x (ikso)", skribita kune) signifas ke x *estas ia ekipaĵo (komputila)*. Ankaŭ oni havos Sx por esprimi ke x *estas ia softvaro*, kaj Tx kiu signifos x *estas teksto-tradukilo* (softvaro por aŭtomate traduki tekstojn).

Nun oni scias ke certas Et, Er, Sp kaj neniu alia.

Kvantoroj ebligos nin skribi veraĵojn kiuj priparolas pri kelkaj elementoj el domajno. Estas du kvantoroj:

- Universala kvantoro: $\forall$. Kiam oni metas $\forall x Px$ ("*por ĉiu* x, P *de* x"), oni volas esprimi ke ĉiuj elementoj el domajno certigas la proprecon P.
- Ekzistokvantoro: $\exists$. $\exists x Px$ ("*ekzistas* x *kia* P *de* x") signifas ke almenaŭ unu elemento el domajno certigas la proprecon P.

Ekzemple, ĉi tie estas certaj la jenaj formuloj: $\forall x(Ex \vee Sx)$, $\neg\exists x Tx$, $\forall x(Tx \Rightarrow \neg Ex)$, $\exists x Ex \wedge \exists x Sx$ kaj multaj aliaj. Kvantoroj havas saman prioritaton ol la $\neg$.

Reguloj tie klarigitaj prilaboros nur kun *liberaj anstataŭigoj*. Pardonu min pro ne klarigi kion tio signifas, sed mi ne volas devojiĝi de la temo.

7.2.2 Enigo de ekzistokvantoro

Se oni vidas pruvon de ekzisto, oni rajtas diri ke iu propreco certas pro almenaŭ unu elemento:

$$\begin{array}{lll} \text{n} & A\{t/x\} & \\ \hline & \exists x A & \text{I}\exists \text{ n,t} \end{array}$$

Tio $A\{t/x\}$ estas *anstataŭigo* (legata "t *super* x", temas pri ŝanĝi x al t).

Tiu regulo esprimas ke se oni vidas At, kie t estas elemento, oni povas aserti ke $\exists x Ax$, ĉar kiam x estas t ja certas la propreco.

7.2.3 Forigo de ekzistokvantoro

Eltiri ion certan el $\exists x Px$ iom kostas, sed oni agas tiel:

$$
\begin{array}{lll}
\text{m} & \exists x A & \\
\text{n} & \quad A\{a/x\} & \text{H} \\
\text{p} & \quad B & \\
\hline
& B & \text{E}\exists\ \text{m,n,p,a}
\end{array}
$$

Do, se unu el la pluraj A entenas B, tiam oni scias ke B, ĉar ja konas ke unu el la A certas. Laŭ teknikaj teorioj, ne rajtas aperi iun a ĉe B nek ĉe iu atingebla hipotezo.

7.2.4 Enigo de universala kvantoro

Tiu ja estas facila:

$$
\begin{array}{lll}
\text{n} & A & \\
\hline
& \forall x A & \text{I}\forall\ \text{n}
\end{array}
$$

Do, se A ĉiam certas, tiam certas por ajna valoro de x. Neniu *libera* x aperu en atingebla hipotezo (pardonu tiajn "kriptajn" frazojn, sed ili estas parto de teorio).

7.2.5 Forigo de universala kvantoro

Ankaŭ facile komprenebla:

$$
\begin{array}{lll}
\text{n} & \forall x A & \\
\hline
& A\{t/x\} & \text{E}\forall\ \text{n,t}
\end{array}
$$

Se oni scias ke A certas por ĉiuj elementoj, tiam oni povas elekti iun ajn elementon kaj scios ke A certas en tiu elemento.

7.2.6 Ekzemploj

Ĉe la lasta sekcio estas kelkaj ekzemploj kun kvantoroj, sed ne klarigitaj. Plej eble vi devos konsulti ian logikan libron se vi celas kompreni ilin.

7.3 Malbazaj reguloj

Ĉe multaj libroj kaj kursetoj oni havas plurajn derivregulojn (alie al la 9 bazaj) kiuj ebligas pli rapide labori kun formuloj. Ili prezentas abstrakton: forlasi pensi en detalojn por dediĉiĝi al pli kompleksajn problemojn (kiel ĉe la *altnivelajn* programlingvojn).

Se vi decidas uzi ilin, vi malhavis plurajn farendaĵojn, sed vi pli frue finos. Mia konsilo estas uzu regulon nur se vi eblas pruvi ĝian validecon per la 9 bazaj reguloj.

Iuj kiuj mi trovis ie estas:

- *Duobla nego*: ebligas ŝanĝi A al $\neg\neg A$ kaj reciproke.
- *Modus Tollens*: havante $A \Rightarrow B$ kaj $\neg B$, tiam $\neg A$.
- *Silogismo disjunkcia*: se $A \vee B$ kaj $\neg A$, do B. Kaj se $A \vee B$ kaj $\neg B$, tiam do A.
- *Forigo de* $\neg\Rightarrow$: se oni havas $\neg(A \Rightarrow B)$, tiam ankaŭ A kaj $\neg B$ okazas.
- *Forigo de* $\neg\vee$: se oni havas $\neg(A \vee B)$, tiam$\neg A$, kaj ankaŭ $\neg B$.
- *Forigo de* $\neg\wedge$: se oni havas $\neg(A \wedge B)$, tiam $\neg A \vee \neg B$.
- *Aliaj teoremoj*: $A \Rightarrow A$, $A \vee \neg A$, $\neg(A \wedge \neg A)$ kaj aliaj.
- *Anstataŭigo de ekvivalentaj formuloj*: se $A \iff B$, tiam kie diras A oni povas meti B kaj reciproke.

Kvankam aliaj ekzistas, se oni demandas ekzercon al vi, oni jam diros kiuj reguloj estas permesitaj kaj kiuj ne (ekzemple, al ni oni permesis uzi nur la bazajn).

8 Ekstra

Se vi jam konis ĉion kion mi aldiris, aŭ dubas pri temoj aliaj al la agmaniero de natura dedukto, restu ĉe tiu sekcio.

8.1 Kial nomiĝas naturan dedukton?

Ĉar la rimedojn oni uzas estas la samaj kiujn homoj faras dumpense.

Rimarku la klarigitajn ekzercojn. Esprimu la derivojn per vortoj, diru ilin al iu, kaj fine li/ŝi diros vin ke "*kompreneble, ĉar ...*". Vi vidos ke iu ajn eblas rakonti kiel uzu iujn el la 9 reguloj, eĉ malkonante ilian nomon aŭ ekzistecon.

Do, por diveni kiel fari ekzercon pri natura dedukto, forgesu regulojn de *enigo* kaj *forigo*, kaj pensu normale, ŝanĝante la literojn per simplaj agoj, se necese. Estas utile pensi pri agoj kiel *pluvas*, *ne pluvas*, *estas sune*, *mi sekas*, ... pro esti simplaj vortoj kiujn ĉiu homo povas bone kompreni, kaj alie, estas facile rilati agojn kiel *ne malsekiĝi* kun *esti sune kaj ne pluvi*, aŭ eĉ kun pli kompleksaj formuloj.

8.2 Ĉu la solvo estas nura?

Ne. Ju pli kompleksa estas la ekzerco, des pli aliaj manieroj solvi ĝin ekzistas. Ĉe la sekcio pri klarigitaj ekzercoj, mi metis plurajn solvojn por iu ekzerco.

Kompreneble, vi povas deduktadi veraĵojn kiuj tute malutilas, kaj atingos alian solvon. Tamen, estas plej bone provi fari ĉiun ekzercon plej eble mallonge.

8.3 Aliaj rimedoj por pruvi validecon

Natura dedukto estas maniero pruvi la validecon de derivo, sed ne estas la sola rimedo. Jen aliaj:

8.3.1 Brutforte

Eblas listi la tutajn aranĝaĵojn de valoroj por ĉiu variablo kaj pruvi ke, por ĉiu el ili, se la maldekstra parto de la derivo certas tiam la dekstra parto ankaŭ certas.

Por n variabloj, estos pruvendaj 2^n okazoj.

Tamen, kvantoroj jen estas problemo, ĉar jam partoprenas domajno. Kaj estas neeble listi iajn domajnon, ĉar domajno povas enhavi infinitojn elementojn.

8.3.2 Teoremo de refuto

Teoremo de refuto diras ke $\Gamma \vDash A \iff \nvDash \Gamma, \neg A$.

Pervorte: aro da formuloj Γ (*gamma*) havas kiel sekvo A *se kaj nur se* la sistemo formata per Γ kune de $\neg A$ estas malplenumebla.

Tio pri kiel pruvi *malplenumeblo* estas alia temo, iom longa, kiel ĝia nomo sugestas. Unu el la facilaj rimedoj estas uzi arbon de klaŭza *rezolucio*.

8.4 Kiel pruvi nevalidecon

Natura dedukto aldonas proceden por pruvi ke rezonado estas korekta, sed, kial oni pruvas ke rezonado estas malkorekta? Natura dedukto tion ne ebligas.

Jen la nuna okazo: oni havas derivon $\Gamma \vdash A$, kaj kredas ke ekzistas *modelo* (aro da valoroj) kiu certigas Γ -*gamma*- sed ne al A. Nu, oni nur devas trovi ĝin por pruvi ke tiu derivo estas nevalida. Al tiu modelo oni nomas *kontraŭmodelo*, kaj estas trovebla per pluraj rimedoj. Mi kredas ke la plej facila estas *intuicie*: provadi kelkajn valorojn kiuj ŝajnas kontraŭmodelon, ĝis oni trovu unu.

Ekzemple, $\neg P \Rightarrow \neg Q,\ \neg Q \vdash \neg P \vee Q$ estas nevalida ($\nvDash$), ĉar kiam P certas kaj Q falsas, tio el maldekstre (*premisoj*) estas certa, sed tio el dekstre (*konkludo*) estas falsa, do $\neg P \vee Q$ ne estas sekvo de tio el maldekstre.

8.5 Kreu viajn ekzercojn

Se vi jam legis kaj lernis ĉiujn ekzemplojn el tiu dokumento, jen eraro! Nun vi mankas ekzercojn por praktiki vi mem.

Vi ja povas elpensi derivojn kaj provi pruvi ilian validecon; sed plej malfeliĉe, se ili ne estas validaj, vi pasos tro da tempo malutile. Vi devas elpensi derivojn ja validajn, kaj poste pruvi ilin korekte.

Kelkaj metodoj por tion atingi estas:

- Se A kaj B estas la sama formulo, sed verkita per aliaj ekvivalentaj formoj, provu pruvi $A \vDash B$ aŭ $B \vDash A$.
- Prenu veraĵon kaj pruvu ĝin. Ekzemple: $\vdash P \wedge P \Rightarrow P \vee P$.

- Prenu malverajôn, negi ĝin, kaj pruvu tiun formulon. Jen ekzemplo: $\neg(A \wedge (A \Rightarrow B) \wedge \neg B)$. Tiu metodo farigos vin praktiki la *redukto al absurdo*.

- Transformu iun formulon al ĝia *norma kaja formo* (ĝi restos kia $io \wedge io \wedge ... \wedge io$). Tiam vi havas kelkajn formulojn kiuj certas samtempe: ĉiu el la kajeroj. Vi povas preni unu el ili kaj aserti ke kiam la originala formulo certas, tiam tiu kajero ankaŭ certas.

- Prenu plurajn formulojn hazarde, kaj supozu ke ĉiuj certas samtempe. Por tion fari, krei ilian konjunkcion ($unu \wedge alia \wedge alia \wedge ...$). Tiun formulegon vi povas modifi per la antaŭaj metodoj por serĉi sekvojn. Ĉi ĉio vin utilos por praktiki naturan dedukton kun *pluraj* formuloj certaj maldekstre de la derivo.

8.6 Programoj kiuj faras naturan dedukton

Ĉu ekzistas komputilaj programoj por fari ĉio kio mi klarigis, sed senpense aŭ senlabore? Nu, mi ne vere scias; mi konas neniun. Ĉiujn ekzemplojn ĉi tie mi faris mi mem, klopodinte.

Oni povas provi funkciigi ion kia seqprover[8] aŭ pandora[9]. Mi malatingis tion, kaj iomete mi trovis malfinitajn projektojn. Supozeble, estas malfacila fari tian programon, ĉar dedukto estu *natura* (plej taŭga por homaj mensoj). Tamen, komputiloj ebligas apliki brutforton...

Kion vi ja povas provi, kaj bone funkcias, estas ludo[10] simila al domeno kiu utilas por pruvi derivojn per koloraj pecoj. Ĝi bezonas iom da prilernado.

9 Ekzemploj, pluraj ekzemploj

Finonte, mi metas ĉi tie kolekton da multaj ekzemploj (senkomente). Estas faritaj de mi, do se vi ektrovas erarojn, sciigu min.

La unuaj 14 estas klarigitaj pervorte ĉe sekcio 5.

9.1 $P,\ P \Rightarrow Q \vdash P \wedge Q$

1	P	
2	$P \Rightarrow Q$	
3	Q	E$\Rightarrow$ 2,1
4	$P \wedge Q$	I$\wedge$ 1,3

[8] http://bach.istc.kobe-u.ac.jp/seqprover/
[9] http://www.doc.ic.ac.uk/ yg/projects/AI/prover.html
[10] http://www.winterdrache.de/freeware/domino/

9.2 $P \wedge Q \Rightarrow R,\ Q \Rightarrow P,\ Q \vdash R$

1	$P \wedge Q \Rightarrow R$	
2	$Q \Rightarrow P$	
3	Q	
4	P	E$\Rightarrow$ 2,3
5	$P \wedge Q$	I$\wedge$ 4,3
6	R	E$\Rightarrow$ 1,5

9.3 $P \Rightarrow Q,\ Q \Rightarrow R \vdash P \Rightarrow Q \wedge R$

1	$P \Rightarrow Q$	
2	$Q \Rightarrow R$	
3	$\quad P$	H
4	$\quad Q$	E$\Rightarrow$ 1,3
5	$\quad R$	E$\Rightarrow$ 2,4
6	$\quad Q \wedge R$	I$\wedge$ 4,5
7	$P \Rightarrow Q \wedge R$	I$\Rightarrow$ 3,6

9.4 $P \vdash Q \Rightarrow P$

1	P	
2	$\quad Q$	H
3	$\quad P$	IT 1
4	$Q \Rightarrow P$	I$\Rightarrow$ 2,3

9.5 $P \Rightarrow Q,\ \neg Q \vdash \neg P$

1	$P \Rightarrow Q$	
2	$\neg Q$	
3	$\quad P$	H
4	$\quad Q$	E$\Rightarrow$ 1,3
5	$\quad \neg Q$	IT 2
6	$\neg P$	I$\neg$ 3,4,5

9.6 $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \vdash Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

1	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	
2	$\mid\ Q$	H
3	$\mid\ \mid\ P$	H
4	$\mid\ \mid\ Q \Rightarrow R$	E$\Rightarrow$ 1,3
5	$\mid\ \mid\ R$	E$\Rightarrow$ 4,2
6	$\mid\ P \Rightarrow R$	I$\Rightarrow$ 3,5
7	$Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$	I$\Rightarrow$ 2,6

9.7 $P \vee (Q \wedge R) \vdash P \vee Q$

1	$P \vee (Q \wedge R)$	
2	$\mid\ P$	H
3	$\mid\ P \vee Q$	I$\vee$ 2
4	$\mid\ Q \wedge R$	H
5	$\mid\ Q$	E$\wedge$ 4
6	$\mid\ P \vee Q$	I$\vee$ 5
7	$P \vee Q$	E$\vee$ 1,3,6

9.8 $L \wedge M \Rightarrow \neg P,\ I \Rightarrow P,\ M,\ I \vdash \neg L$

1	$L \wedge M \Rightarrow \neg P$	
2	$I \Rightarrow P$	
3	M	
4	I	
5	$\mid\ L$	H
6	$\mid\ L \wedge M$	I$\wedge$ 5,3
7	$\mid\ \neg P$	E$\Rightarrow$ 1,6
8	$\mid\ P$	E$\Rightarrow$ 2,4
9	$\neg L$	I$\neg$ 5,7,8

9.9 $\vdash P \Rightarrow P$

1	$\quad\mid P$	H
2	$\quad\mid P$	IT 1
3	$P \Rightarrow P$	I$\Rightarrow$ 1,2

9.10 $\vdash \neg(P \wedge \neg P)$

1	$\quad\mid P \wedge \neg P$	H
2	$\quad\mid P$	E$\wedge$ 1
3	$\quad\mid \neg P$	E$\wedge$ 1
4	$\neg(P \wedge \neg P)$	I$\neg$ 1,2

9.11 $\vdash P \vee \neg P$

1	$\quad\mid \neg(P \vee \neg P)$	H
2	$\quad\mid\quad\mid P$	H
3	$\quad\mid\quad\mid P \vee \neg P$	I$\vee$ 2
4	$\quad\mid\quad\mid \neg(P \vee \neg P)$	IT 1
5	$\quad\mid \neg P$	I$\neg$ 2,3,4
6	$\quad\mid P \vee \neg P$	I$\vee$ 5
7	$\quad\mid \neg(P \vee \neg P)$	IT 1
8	$\neg\neg(P \vee \neg P)$	I$\neg$ 1,6,7
9	$P \vee \neg P$	E$\neg$ 8

9.12 $P \vee Q,\ \neg P \vdash Q$

1	$P \vee Q$	
2	$\neg P$	
3	$\mid\ P$	H
4	$\mid\ \mid\ \neg Q$	H
5	$\mid\ \mid\ \neg P$	IT 2
6	$\mid\ \mid\ P$	IT 3
7	$\mid\ \neg\neg Q$	I$\neg$ 4,5,6
8	$\mid\ Q$	E$\neg$ 7
9	$\mid\ Q$	H
10	$\mid\ Q$	IT 9
11	Q	E$\vee$ 1,8,10

9.13 $A \vee B,\ A \Rightarrow C,\ \neg D \Rightarrow \neg B \vdash C \vee D$

1	$A \vee B$	
2	$A \Rightarrow C$	
3	$\neg D \Rightarrow \neg B$	
4	$\mid\ A$	H
5	$\mid\ C$	E$\Rightarrow$ 2,4
6	$\mid\ C \vee D$	I$\vee$ 5
7	$\mid\ B$	H
8	$\mid\ \mid\ \neg D$	H
9	$\mid\ \mid\ \neg B$	E$\Rightarrow$ 3,8
10	$\mid\ \mid\ B$	IT 7
11	$\mid\ \neg\neg D$	I$\neg$ 8,9,10
12	$\mid\ D$	E$\neg$ 11
13	$\mid\ C \vee D$	I$\vee$ 12
14	$C \vee D$	E$\vee$ 1,6,13

9.14 $A \iff B \vdash (A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)$

1	$(A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow A)$	
2	$\mid\ \neg(A \lor \neg A)$	H
3	$\mid\ \mid\ A$	H
4	$\mid\ \mid\ A \lor \neg A$	I$\lor$ 3
5	$\mid\ \mid\ \neg(A \lor \neg A)$	IT 2
6	$\mid\ \neg A$	I$\neg$ 3,4,5
7	$\mid\ A \lor \neg A$	I$\lor$ 6
8	$\mid\ \neg(A \lor \neg A)$	IT 2
9	$\neg\neg(A \lor \neg A)$	I$\neg$ 2,7,8
10	$A \lor \neg A$	E$\neg$ 9
11	$\mid\ A$	H
12	$\mid\ A \Rightarrow B$	E$\land$ 1
13	$\mid\ B$	E$\Rightarrow$ 12,11
14	$\mid\ A \land B$	I$\land$ 11,13
15	$\mid\ (A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)$	I$\lor$ 14
16	$\mid\ \neg A$	H
17	$\mid\ \mid\ B$	H
18	$\mid\ \mid\ B \Rightarrow A$	E$\land$ 1
19	$\mid\ \mid\ A$	E$\Rightarrow$ 18,17
20	$\mid\ \mid\ \neg A$	IT 16
21	$\mid\ \neg B$	I$\neg$ 17,19,20
22	$\mid\ \neg A \land \neg B$	I$\land$ 16,21
23	$\mid\ (A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)$	I$\lor$ 22
24	$(A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)$	E$\lor$ 10,15,23

9.15 $P \vdash (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$

1	P	
2	$\mid\ P \Rightarrow Q$	H
3	$\mid\ Q$	E$\Rightarrow$ 2,1
4	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$	I$\Rightarrow$ 2,3

9.16 $P \Rightarrow Q \vdash (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

1	$P \Rightarrow Q$	
2	$\mid\ Q \Rightarrow R$	H
3	$\mid\ \mid\ P$	H
4	$\mid\ \mid\ Q$	E$\Rightarrow$ 1,3
5	$\mid\ \mid\ R$	E$\Rightarrow$ 2,4
6	$\mid\ P \Rightarrow R$	I$\Rightarrow$ 3,5
7	$(Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$	I$\Rightarrow$ 2,6

9.17 $P \Rightarrow Q,\ P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \vdash P \Rightarrow R$

1	$P \Rightarrow Q$	
2	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	
3	$\mid\ P$	H
4	$\mid\ Q$	E$\Rightarrow$ 1,3
5	$\mid\ Q \Rightarrow R$	E$\Rightarrow$ 2,3
6	$\mid\ R$	E$\Rightarrow$ 5,4
7	$P \Rightarrow R$	I$\Rightarrow$ 3,6

9.18 $P \wedge Q \Rightarrow R \vdash P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

1	$P \wedge Q \Rightarrow R$	
2	$\quad P$	H
3	$\quad\quad Q$	H
4	$\quad\quad P \wedge Q$	I$\wedge$ 2,3
5	$\quad\quad R$	E$\Rightarrow$ 1,4
6	$\quad Q \Rightarrow R$	I$\Rightarrow$ 3,5
7	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	I$\Rightarrow$ 2,6

9.19 $\neg P \vdash P \Rightarrow Q$

1	$\neg P$	
2	$\quad P$	H
3	$\quad\quad \neg Q$	H
4	$\quad\quad \neg P$	IT 1
5	$\quad\quad P$	IT 2
6	$\quad \neg\neg Q$	I$\neg$ 3,4,5
7	$\quad Q$	E$\neg$ 6
8	$P \Rightarrow Q$	I$\Rightarrow$ 2,7

9.20 $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

1	$A \wedge (B \vee C)$	
2	A	E$\wedge$ 1
3	$B \vee C$	E$\wedge$ 1
4	$\quad B$	H
5	$\quad A \wedge B$	I$\wedge$ 2,4
6	$\quad (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	I$\vee$ 5
7	$\quad C$	H
8	$\quad A \wedge C$	I$\wedge$ 2,7
9	$\quad (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	I$\vee$ 8
10	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	E$\vee$ 3,6,9

9.21 $\neg A \vee B \vdash A \Rightarrow B$

1	$\neg A \vee B$	
2	$\mid\ \underline{A}$	H
3	$\mid\ \mid\ \underline{\neg A}$	H
4	$\mid\ \mid\ \mid\ \underline{\neg B}$	H
5	$\mid\ \mid\ \mid\ A$	IT 2
6	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg A$	IT 3
7	$\mid\ \mid\ \neg\neg B$	I$\neg$ 4,5,6
8	$\mid\ \mid\ B$	E$\neg$ 7
9	$\mid\ \mid\ \underline{B}$	H
10	$\mid\ \mid\ B$	IT 9
11	$\mid\ B$	E$\vee$ 1,8,10
12	$A \Rightarrow B$	I$\Rightarrow$ 2,11

9.22 $\vdash ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$

1	$\mid\ \underline{(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P}$	H
2	$\mid\ \mid\ \underline{\neg P}$	H
3	$\mid\ \mid\ \mid\ \underline{P}$	H
4	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \underline{\neg Q}$	H
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ P$	IT 3
6	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \neg P$	IT 2
7	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg\neg Q$	I$\neg$ 4,5,6
8	$\mid\ \mid\ \mid\ Q$	E$\neg$ 7
9	$\mid\ \mid\ P \Rightarrow Q$	I$\Rightarrow$ 3,8
10	$\mid\ \mid\ P$	E$\Rightarrow$ 1,9
11	$\mid\ \mid\ \neg P$	IT 2
12	$\mid\ \neg\neg P$	I$\neg$ 2,10,11
13	$\mid\ P$	E$\neg$ 12
14	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$	I$\Rightarrow$ 1,13

9.23 $Pa,\ Qa \vdash \exists x(Px \land Qx)$

1	Pa	
2	Qa	
3	$Pa \land Qa$	I$\land$ 1,2
4	$\exists x(Px \land Qx)$	I$\exists$ 3,a

9.24 $\forall x(Px \Rightarrow Qx),\ Pa \vdash Qa$

1	$\forall x(Px \Rightarrow Qx)$	
2	Pa	
3	$Pa \Rightarrow Qa$	E$\forall$ 1,a
4	Qa	E$\Rightarrow$ 3,2

9.25 $\forall x(Px \Rightarrow Qx),\ \forall x(Qx \Rightarrow Rx) \vdash \forall x(Px \Rightarrow Rx),$

1	$\forall x(Px \Rightarrow Qx)$	
2	$\forall x(Qx \Rightarrow Rx)$	
3	$\quad Px$	H
4	$\quad Px \Rightarrow Qx$	E$\forall$ 1,x
5	$\quad Qx \Rightarrow Rx$	E$\forall$ 2,x
6	$\quad Qx$	E$\Rightarrow$ 4,3
7	$\quad Rx$	E$\Rightarrow$ 5,6
8	$Px \Rightarrow Rx$	I$\Rightarrow$ 3,7
9	$\forall x(Px \Rightarrow Rx)$	I$\forall$ 8

9.26 $\exists x \forall y Pxy \vdash \forall y \exists x Pxy$

1	$\exists x \forall y Pxy$	
2	$\quad \forall y Pay$	H
3	$\quad Pay$	E$\forall$ 2,y
4	$\quad \exists x Pxy$	I$\exists$ 3,a
5	$\exists x Pxy$	E$\exists$ 1,2,4,a
6	$\forall y \exists x Pxy$	I$\forall$ 5