Examen de "Historia de la Lògica"

Daniel Clemente Laboreo, 45786256-H

2-12-2005

1 Inventor de la lògica

1. "Pitàgores va inventar la Lògica". Comenta aquesta frase

Segons molts llibres, va ser Aristòtil (o millor, els seus alumnes), qui va escriure el primer tractat de lògica: l'Organon, recopilat a l'any 40 a.C per Andronicus Rhodus, un alumne de la seva escola (els *peripatètics*). [1]

Aquí hi parlava de: [2]

- Categories: enumeració de les coses que hi poden aparéixer a una proposició
- Interpretacions: filosofia del llenguatge (paraules, negació, quantificadors, termes simples, ...)
- Anàlisi a priori: el seu mecanisme lògic basat en sil·logismes ("l. de termes", "l. tradicional")
- Anàlisi a posteriori: demostració i coneixement, què és correcte i què no
- Temes: construcció d'arguments vàlids, proposicions que són només probables
- Refutaments dels sofistes: com algunes refutacions són en realitat fal·làcies

Però sembla que, encara que Aristòtil va ser el primer en escriure-ho, aquests mètodes ja es coneixien i usaven des de fa temps. Va haver-hi molts filòsofs

[1] Hammond, p. 64, "Andronicus Rhodus"
[2] Wikipedia, article "Aristotelian logic" (comentaris i enllaços a les obres de l'Organon en anglès)

abans que ell (com Sòcrates, els sofistes, eleàtics, milesis, i més) que ja havien parlat de tot això.

En concret, Pitàgores, 5 segles abans, ja havia estat utilitzant el que explica Aristòtil, per tant la lògica no es pot considerar com *invenció* d'Aristòtil, sinó més be dels filòsofs anteriors, i un dels primers va ser Pitàgores.

Per exemple, Pitàgores va fundar l'escola dels *Mathematikoi*, on ja es preocupaven d'aquests temes. Els pitagòrics creien que tots els conceptes eren nombres i que qualsevol relació es podia expressar en forma de números (idees semblants a les de Boole, més endavant). Després ell va trobar que els nombres naturals no ho eren tot, ja que hi havia conceptes que no es podien expressar amb ells, com la longitud de la diagonal d'un quadrat de costat 1. Així va descobrir els nombres irracionals, i fins i tot ho va demostrar per reducció a l'absurd:
Demostració de Pitàgores on hi intervé la lògica:
d és la diagonal d'un quadrat de costat 1. Pel teorema de Pitàgores, $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Suposem que d és racional: $d = \frac{a}{b}$, amb la fracció irreductible. Elevem al quadrat: $d^2 = \frac{a^2}{b^2}$, o sigui, $2 = \frac{a^2}{b^2}$. Aïllem: $a^2 = 2b^2$. Sembla que a és parell, perquè a^2 ho és. Llavors, a a^2 hi ha dos factors 2, i a la dreta també: un d'ells hi surt escrit, i l'altre està a b^2. Per tant, b també és parell i llavors $\frac{a}{b}$ ja no és irreductible. Contradicció. Per tant, d no és racional.

Pitàgores va començar a axiomatitzar la geometria. Per l'anomenat *teorema de Pitàgores*, ja va utilitzar mètodes algebraics no trivials, encara que tampoc està clar si realment ho va demostrar ell, ja que durant 5 segles no es va veure cap atribució. Va ser després, gràcies a Plutarc i Ciceró. [3]

També va trobar regles a la música, i encara ara s'utilitza el seu mètode per ajustar els tons dels instruments. És la forma més antiga coneguda per ajustar l'escala de 12 notes. [4]

El problema és que es sap poc sobre la vida i obra de Pitàgores (no es conserven llibres realment escrits per ell), mentre que Aristòtil va viure bastants anys després, i va escriure sobre tots els temes possibles, fent-se més popular. Tot i així, no es basava en dades empíriques, i per això comet alguns errors, com dir que els homes tenen més dents que les dones [5], o que totes les veritats es poden generar a partir de 3 fòrmules ($A \Rightarrow A$, $\neg(A \wedge \neg A)$, $A \vee \neg A$).

Per tant, Pitàgores sí que es pot considerar l'inventor de la lògica clàssica, ja que va descobrir bastants dels seus mètodes. Però qui els va escriuren van ser els alumnes d'Aristòtil.

[3] Wikipedia, article "Pythagorean theorem"
[4] Wikipedia, article "Pythagorean tuning"
[5] Wikipedia, article "Aristotle"

2 *Mecanisme* de Llull, i aprofitament per Leibniz

> 2. En un moment determinat, Llull va recórrer al concepte de "mecanisme" per poder basar-hi el raonament, i Leibniz ho va aprofitar per provar de basar-hi tota la Lògica. Explica-ho.

Llull va ser un expert en combinatòria: a la seva obra *Ars generalis ultima*, o *Ars magna* (1305), presenta mètodes per combinar conceptes i així arribar a contradiccions (si són combinacions impossibles) o a noves veritats (que haurien de ser acceptables per tothom, sense importar la religió. Per tant, volia un *procediment* mecànic que permetés trobar nou coneixement.

El seu ideal era fonamentar la fe en la lògica, i ser capaç de *trobar* i *demostrar* per procediments mecànics totes les doctrines cristianes, per poder convertir millor els infidels. Una idea una mica boja, però menys que les que havien tingut els seus companys filòsofs anteriors.

Per arribar a la seva meta, havia de fixar un conjunt de regles que fossin certes, i seguir-les sempre, a diferència de -per exemple- els sofistes, que consideraven que la veritat d'una afirmació és irrellevant, i que el si és certa o falsa ho ha de decidir cada jutge pels seus propis criteris[6].

Com és habitual, no va entendre ell mateix el que estava descobrint, i junt amb idees innovadores sobre lògica, intentava arribar a descobrir a Déu mitjançant aquestes. Això no va acabar d'agradar a l'Església (ni tampoc que fes experiments amb alquímia), i després de morir, van condenar el seu *misticisme racional* (papa Gregori XI, 1376).

Aquesta prohibició li va donar fama, i d'aquí en endavant, molta gent tenia i s'inspirava en els seus llibres. Un d'ells, Gottfried Leibniz (1646-1716), 400 anys després de Llull, estava interessat en fer realitat el somni de Llull. Aquesta vegada va tenir més èxit, ja que Leibniz va revestir les idees lullianes amb teories sòlides i amb més matemàtica (encara que també era teòleg i creia en els *mònades*).

A més Leibniz va construir la primera màquina real que calculava (multiplicant i dividint), i va planejar una que feia integrals i derivades[7]. Llull ja havia fet moltes *màquines*, però només eren discos giratoris (manuals), i dibuixos de taules, grafs, i altres relacions, que podien ser útils per a la criptografia. Però el de Leibniz era més automàtic, i per tant estava més proper dels ideals de Llull.

Així, Leibniz va descobrir que la base 2 era un bon sistema per calcular, ja que simplificava els mecanismes. També va fer altres descobriments degut a

[6] Wikipedia, article "Sophism"
[7] Wikipedia, article "Calculus ratiocinator"

la seva calculadora, com els infinetèssims. Tot això va ajudar moltíssim als següents matemàtics.

En concret, qui va poder recuperar l'obra de Leibniz (com la *Dissertatio de arte combinatoria*, 1666), va ser George Boole (1815-1864), que va renovar i resucitar la lògica que ara usem (*Mathematical Analyisis of Logic*, 1847), beneficiant-se per tant de tot el treball de Llull.

Fonts: [8] [9] [10] [11]

3 Boole i la lògica moderna

> 3. "Boole va inventar la lògica moderna". Fins a quin punt és certa aquesta afirmació? Com ho va plantejar, ell? Va ser ell realment l'autèntic inventor?

George Boole (1815-1864), va ser -junt amb De Morgan- un dels primers matemàtics anglesos a escriure sobre lògica des dels temps de John Wallis (2 segles abans). Per tant, és normal que les seves idees revolucionàries marquin el començament d'una nova època.

Al seu pamflet del 1847 *Mathematical Analysis of Logic*, presenta una relació entre les lleis del pensament i la matemàtica, però restringint aquesta als valors 0 i 1. També va començar a parlar de variables (en aquest cas, variables matemàtiques: x, y, z, ...), que corresponien a conceptes que es podien combinar entre ells, i de relacions entre conceptes/variables, molt semblants a la matemàtica tradicional (suma, resta, igualtat, producte, i fins i tot altres més estranyes). Per tant, proporcionava una forma de traduir conceptes a *fórmules*, i després operar amb aquestes fórmules sense perdre el significat.

El seu article, encara que afirma moltes teories i demostra algunes, conté bastants complicacions innecesàries, que actualment ja hem solucionat. Per exemple, l'ús de dos quantificadors ($\forall$ i $\exists$) en comptes de moltes frases amb combinacions de paraules (com "alguns Zs són no-Ys"), l'ús dels 4 operadors ($\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$), les taules de la veritat per descriure funcions, etc. El propi Boole va reconèixer més tard que s'havia complicat massa, i va demanar que es considerés només la seva obra (major) *An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* (1854), però encara es continua estudiant el seu primer pamflet, potser perquè té un títol més curt.

[8] "Llull com a informàtic-*avant-la-lettre*", Ton Sales

[9] Wikipedia, article "Ramon Llull"

[10] Wikipedia, article "Gottfried Leibniz"

[11] Wikipedia, article "George Boole"

O sigui, que Boole va renovar la lògica, li va donar un nou aspecte, però tampoc va acabar de crear la *lògica de primer ordre* del segle XX. Però la seva obra va servir per a que altres la milloressin. Per exemple, 70 anys després de la seva mort, va conèixer la seva obra Claude Shannon (famós, entre altres coses, per fer el primer robot que feia malabars, i per córrer pels passadissos de l'universitat en monocicle[12]). A Shannon li van venir bé les idees de Boole sobre el sistema binari.

Fonts: [13] [14]

Però les idees de Boole estaven basades en obres anteriors. Per exemple, la base binària ja havia estat estudiada per Leibniz, i el sistema per descobrir veritats a partir de les ja existents va ser el camp de Llull. Boole va aportar moltes més coses (com demostracions, classes d'objectes, funcions de veritat, i unes quantes tautologies), i també en va treure d'altres (al seu document no parla de Déu, de la fe, ni dels musulmans). Però no crec que cap d'ells sigui l'*inventor* de la lògica, sino que tots hi han participat molt. Per altra banda, crec que en aquest punt de la història, la lògica booleana encara no està completament llesta, i falta que Schröder$\cup$Peirce i Hilbert i amics acabin de formalitzar-la.

4 Hilbert i el seu programa

> 4. Valora la importància que ha tingut Hilbert i el seu programa (tal com el van provar de desenvolupar Gödel, Gentzen, Turing i von Neumann) en el desenvolupament de la Lògica.

David Hilbert (1862-1943) ha sigut un dels matemàtics més reconeguts del segles 19 i 20, entre moltes altres coses, per haver fet al 1900 una llista de 23 problemes matemàtics a resoldre. El 2n era comprovar si els axiomes de la lògica eren consistents.

Gödel va demostrar que no amb el *teorema de l'incompletesa*: "totes les formulacions axiomàtiques consistents de la teoria de nombres inclouen proposicions indecidibles" [15]. O sigui, que si la teoria de nombres és consistent, llavors no es pot demostrar això utilitzant els mètodes del càlcul de predicats de primer ordre. També explicat com: un sistema formal (que sigui suficientment interessant com per a poder formular la seva pròpia consistència) pot demostrar la seva consistència si i només si és inconsistent.

[12]"A personal tribute to Claude Shannon", per Arthur Lewbel. http://www2.bc.edu/~lewbel/Shannon.html

[13]Encyclopedia Britannica de 1911, "George Boole"

[14]"The Calculus of Logic", George Boole, 1848

[15]"Gödel, Escher, Bach", Douglas R. Hofstadter, p. 17, 1989

Gentzen va demostrar, al 1936, que la consistència i completesa de l'aritmètica es podia demostrar usant *inducció transfinita*, però això no permet demostrar per complet la consistència de les matemàtiques. Per tant, sempre estarem treballant amb sistemes que no sabem si es poden contradir (inconsistents) o no.

Gentzen també va formalitzar les regles de la deducció natural al 1934, encara que va ser Fitch qui va simplificar les regles (1944), i sobre tot, la notació, de forma que gairebé és comprensible per a persones no expertes en lògica (per això és la que s'usa a "Introducció a la lògica").

Tornant a Hilbert; el seu pla era intentar demostrar la consistència de sistemes complicats (com l'anàlisi amb reals) en funció de sistemes més senzills, per tal de reduir tota la matemàtica a l'aritmètica bàsica. Desgraciadament (o afortunadament), Gödel va demostrar que l'aritmètica no podia demostrar la seva pròpia consistència, i per tant tampoc serviria per a sistemes més complexos. Va ser von Neumann qui li va donar la notícia a Hilbert.

Hilbert no va poder complir el seu pla de convertir la matemàtica en un procés automàtic consistent i decidible, com hauria volgut Llull o Leibniz (però els matemàtics defensors de la creativitat). En lloc d'això, van estar jugant amb l'*Entscheidungsproblem* (saber si un enunciat lògic de primer ordre és universalment vàlid o no) i el *problema de l'aturada*, consistent en saber si donat un programa i una entrada seva, s'aturarà o entrarà en un bucle infinit. Church, Kleene i Gödel van intentar resoldre-ho sense èxit, encara que del treball de Church va sorgir un nou mecanisme abstracte (el λ-càlcul (del qual han derivat alguns llenguatges de programació (com LISP (1958)))).

Alan Turing també va proposar una solució al problema de l'aturada, i va resultar correcta. Suposem que existís la funció màgica que ens detecta els bucles infinits:

```
function trouble(string s)
   if halt(s, s) = false
      return true
   else loop forever
```

I si aquest algorisme es pot representar per t, la pregunta "S'atura *trouble(t)*?" ens porta a una contradicció.

Després entre tots quatre (Church, Kleene, Gödel, Turing) van quedar d'acord en que tots els seus sistemes eren equivalents i permetien calcular les mateixes funcions (sempre que fossin calculables, és clar). És el que es coneix com *tesi de Church-Turing*.

Turing va estar de 1936 a 1938 a l'IAS (*Institute for Advanced Study*) de

Princeton, USA, on hi treballava John von Neumann des de 1933 fins la seva mort. von Neumann havia d'haver-se assabentat de les idees de Turing, ja que va aplicar-les al disseny de la *màquina IAS* deu anys més tard. Aquests ordinadors (amb arquitectura von Neumann) ja poden considerar-se moderns i usuaris d'una lògica ben acabada i desenvolupada.

Fonts: [16] [17] [18]

5 Conclusions

> 5. Resumeix en un espai equivalent a un full A4 les explicacions de classe (inclòs el material que s'hi ha anat repartint), la percepció que n'has tingut i les conclusions que n'has tret.

Cronològicament:

A la lògica antiga de Roma hi ha moltes tendències, que duren molt de temps, però avancen molt a poc a poc (comparat amb l'actualitat). Alguns filòsofs utilitzen a Déu per justificar a tot i evitar haver de pensar o raonar, mentre que altres s'inventen altres teories igual d'absurdes (l'univers és canvi, és foc, és èter, són números, ...).

És important Pitàgores (c. 500 a.C.) per aplicar mètodes lògics i matemàtics complicats molt abans que la resta de filòsofs. Després d'ell, l'interès per la lògica es va anar perdent, i quan va arribar Aristòtil (c. 0), ja hi havia poc públic. La *lògica* s'havia convertit, amb els sofistes, en aprendre a enganyar a la gent sutilment mitjançant la retòrica i dialèctica. Per això es parla tant de les fal·làcies, i potser per això està tothom tan confús que no aconsegueixen posar-se d'acord en coses tan bàsiques com el condicional ($\Rightarrow$) o la negació (intuïcionistes).

Segons les *escoles de pensament*, tenim: milesis, pitagòrics, eleàtics, els de transició, sofistes, clàssics, alexandrins, megàrics, i més. A més, no és comú trobar a dos filòsofs que pensin exactament el mateix (ni tan sols a la mateixa escola), per tant és normal que es separin i creïn tants grups.

Entre tots van aportant conceptes útils per separat (però ningú aconsegueix encertar-ho tot), i coneixem alguns experts: Tales i Pitàgores en la geometria, Zenó en les paradoxes, Sòcrates i Plató en el diàleg, Arquímedes en mecànica, etc. En general, tots es dediquen a fer de tot però semi-bé; no s'especialitzen.

[16] "De la matemàtica a la intel·ligència artificial passant per la lògica i la informàtica. Una història episòdica", Ton Sales

[17] Wikipedia, article "David Hilbert"

[18] Wikipedia, article "John von Neumann"

De la lògica antiga a Roma, em quedo amb Parmènides i el *principi de no contradir-se*, que crec que, si volem bons raonaments, ha de ser una condició necessària, però no és suficient. O sigui, que no només basta amb dir coses certes per fer bons raonaments.

Els grecs: sembla que, per la seva posició geogràfica, visitaven a molts pobles diferents, i aprenien de les seves cultures. A algunes no les van entendre (com egipcis, i japonesos) i per això van agafar només simplificacions de temes com música, medecina, o matemàtiques, encara que estiguessin molt avançades a altres llocs.

Molt més endavant: Llull (1274), obsessionat amb l'Ars Magna, descobreix molts conceptes de la lògica per sí sol, i com sempre, no és reconegut fins després de la seva mort, quan el prohibeixen. Influeix en molta gent, i encara ara alguns el consideren com *pare de la informàtica*. Leibniz (1658) el recupera amb ganes; després Boole (1854) continua la seva obra, i Hilbert (altre *pare*) acaba de completar i aclarar la lògica de primer ordre.

Gödel, Hilbert, Turing, Kleene, von Neumann (segles XIX, XX): resolen molts dels problemes de la informàtica (de fet, creen aquesta ciència amb els seus corresponents problemes). I tot sense ordinadors, encara que alguns acaben treballant per l'exèrcit i fan més que teoria.

Russell, Carroll, Gentzen, De Morgan: també aporten molt, a la part de lògica pura, encara que Lewis Carroll es fes famós per escriure contes "infantils".

És curiós que la deducció natural surti fa 60 anys, mentre que s'ha estat fent lògica durant més de 2000 anys (i això que al principi era quan més parlaven de correcció dels raonaments). Sembla que s'hagi estat perdent el temps durant tots aquests segles.

Passant a altre tema; he après coses de lògica pròpiament dita, sense història, com: diferència entre solidesa i completesa, relacions d'ordre i decidibilitat de cada ordre, ús de símbols com $\vdash$ i $\models$, reticles i altres conjunts, sistemes de deducció, i més. També curiositats: etimologia, vida privada de famosos, història, cultura, bogeries, trucs matemàtics, etc.

I aquí s'acaba.